Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

13. Februar 2021

1. Übung

1. Normen.

(a) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann bezeichnet man die Menge $\{\, v \in V \mid \|v\| = 1 \,\}$ aller Vektoren von V mit der Norm 1 als *Einheitskugel* in $(V, \|\cdot\|)$.

(i) *Skizziere* die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

(3 Punkte)

(ii) Nach Satz 9.5 und Definition 9.13, bewiese $B(0,1) = \{\, v \in V \mid \|v\| < 1 \,\}$. *(1 Punkt)*

(iii) Sei x, y in der Einheitskugel von $(V, \|\cdot\|)$. Was ist das Maximum von $d(x,y)$?

(2 Punkte)

(iv) Kann man an den Bildern aus (i) ablesen, dass diese drei Normen äquivalent sind?

(Nur zum Nachdenken)

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. *Zeige*, dass die Maximumsnorm der Grenzwert der p-Normen ist, d.h.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p \,. \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

[*Tipp:* Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so dividiere man den Ausdruck für $\|x\|_p$ durch $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.]

(c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a,b], \mathbb{R})$ den Raum der auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung sich stetig auf $[a,b]$ fortsetzen lässt. Ferner sei für $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$

$$\|f\|_0 := \sup\{\, |f(x)| \mid x \in [a,b] \,\} \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \|f\|_0 + \sup\{\, |f'(x)| \mid x \in [a,b] \,\} \,.$$

Zeige, dass durch $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zwei Normen auf $C^1([a,b], \mathbb{R})$ definiert werden.

(3 Punkte)

2. Grundlagen metrischer Räume.

Belege die folgenden Aussagen *durch jeweils ein Beispiel*:

(a) Es gibt einen metrischen Raum, in dem jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen ist. *(2 Punkte)*

(b) Der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. *(2 Punkte)*

(c) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. *(2 Punkte)*

3. Wie man aus Metriken weitere konstruiert.

Gegeben seien eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X sowie eine monoton steigende Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und der Eigenschaft

$$\forall\, t, s \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ f(t+s) \le f(t) + f(s) \,.$$

(a) *Zeige,* dass dann

$$\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(d(x, y))$$

eine weitere Metrik auf X ist. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}$ die Voraussetzungen erfüllt. *(3 Punkte)*

(c) *Folgere* aus (a) und (b), dass durch $\widetilde{d}(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(1 Punkt)*

Man sieht, dass $\tilde{d}(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in X$.