Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

13. Februar 2021

1. Übung

1. Normen.

(a) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann bezeichnet man die Menge $\{\, v \in V \mid \|v\| = 1 \,\}$ aller Vektoren von V mit der Norm 1 als *Einheitskugel* in $(V, \|\cdot\|)$.

(i) *Skizziere* die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
(3 Punkte)

(ii) Nach Satz 9.5 und Definition 9.13, bewiese $B(0,1) = \{\, v \in V \mid \|v\| < 1 \,\}$. *(1 Punkt)*

(iii) Sei x, y in der Einheitskugel von $(V, \|\cdot\|)$. Was ist das Maximum von $d(x,y)$?
(2 Punkte)

(iv) Kann man an den Bildern aus (i) ablesen, dass diese drei Normen äquivalent sind?
(Nur zum Nachdenken)

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. *Zeige*, dass die Maximumsnorm der Grenzwert der p-Normen ist, d.h.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \,. \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

[*Tipp:* Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so dividiere man den Ausdruck für $\|x\|_p$ durch $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.]

(c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a,b], \mathbb{R})$ den Raum der auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung sich stetig auf $[a,b]$ fortsetzen lässt. Ferner sei für $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$

$$\|f\|_0 := \sup\{\, |f(x)| \mid x \in [a,b] \,\} \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \|f\|_0 + \sup\{\, |f'(x)| \mid x \in [a,b] \,\} \,.$$

Zeige, dass durch $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zwei Normen auf $C^1([a,b], \mathbb{R})$ definiert werden.
(3 Punkte)

Lösung.

(a) **(i)** Skizzen der Einheitsbälle in den drei verschiedenen Normen sind unten.

(ii) $B(0,1) := \{y \in V \mid d(0,y) < 1\} = \{y \in V \mid \|0 - y\| < 1\} = \{y \in V \mid \|y\| < 1\}$.

(iii) Bemerke, dass für alle x in der Einheitskugel also $-x$ auch ist, weil $\|-x\| = |-1|\,\|x\| = 1$. Und $d(x, -x) = \|x - (-x)\| = 2\|x\| = 2$. Für alle x, y in der Einheitskugel, gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x,y) = \|x - y\| \le \|x\| + \|(-y)\| = \|x\| + \|y\| = 2.$$

Deshalb ist der maximale Abstand 2.

(iv) Äquivalenz zweier Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ bedeutet, dass für $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$c\|x\|_a \le \|x\|_b \le \tilde{c}\|x\|_a.$$

Man sieht aus den Skizzen, dass für $p \le q$, $\|x\|_q \le \|x\|_p$. Es gilt auch, dass $\|x\|_p \le \tilde{c}\|x\|_q$ mit $\tilde{c} = 2^{1/p}$. Es gibt ein Bewies in (b).

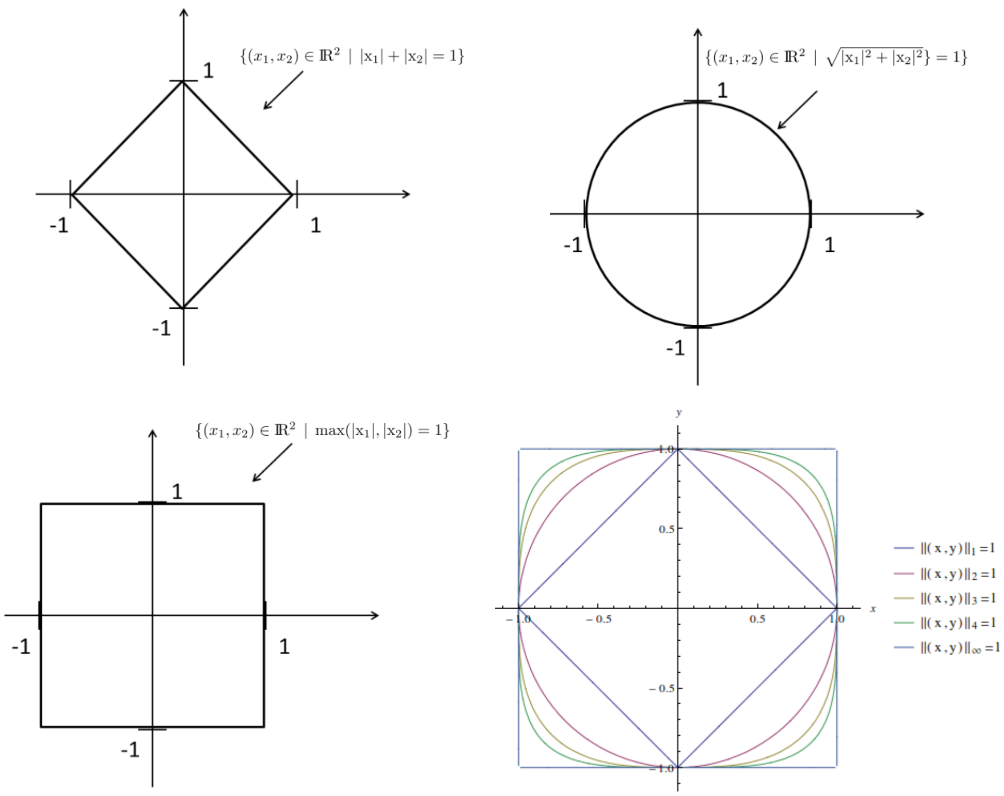


Figure 1: Entwicklung der p-Normen für wachsendes p und die ∞-Norm.

(b) Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann existiert ein $k = \{1, \dots, n\}$ mit

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\} = |x_k|.$$

und es gilt für jedes $p \geq 1$, dass

$$1 = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{(|x_k|^p)^{1/p}}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}}{\|x\|_\infty} = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty}$$

und wieder wegen $\|x\|_\infty = (\|x\|_\infty^p)^{1/p}$, dass

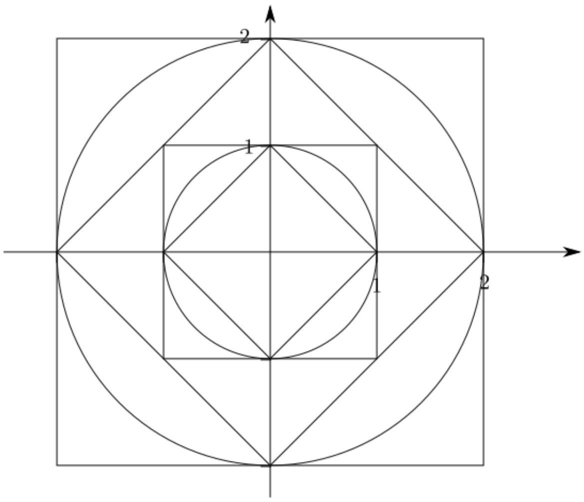
$$\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} = \left(\sum_{i=1}^n \Bigg(\underbrace{\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty}}_{\leq 1}\Bigg)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^p\right)^{1/p} = n^{1/p}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$1 \leq \frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \leq n^{1/p}.$$

Wegen $\lim_{p\to\infty} n^{1/p} = 1$ ergibt sich nach dem Sandwich-Theorem, (Satz 3.5 (vii)): $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

In obiger Rechnung sieht man auch, dass alle p-Normen zur ∞-Norm und somit auch untereinander äquivalent sind!



(c) **zu $\|\cdot\|_0$:** Seien $f, g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ gegeben und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir prüfen die Normeigenschaften aus Df. 9.4:

Positivität: • $\|f\|_0 = \sup\{\underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} \mid x \in [a,b]\} \geq 0$

• Für alle $x \in [a,b]$ gilt $0 \leq \sup\{|f(y)| \mid y \in [a,b]\} = \|f\|_0$ und deshalb

$$\|f\|_0 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Homogenität:

$$\|\lambda \cdot f\|_0 = \sup\{|\underbrace{\lambda \cdot f(x)|}_{=|\lambda|\cdot|f(x)|} \mid x \in [a,b]\} = |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = |\lambda| \cdot \|f\|_0.$$

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_0 &= \sup\{|f(x)+g(x)| \mid x \in [a,b]\} \leq \sup\{|f(x)|+|g(x)| \mid x \in [a,b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} + \sup\{|g(x)| \mid x \in [a,b]\} = \|f\|_0 + \|g\|_0.\end{aligned}$$

zu $\|\ \|_1$: Man beachte, dass $\|f\|_1 \geq \|f\|_0$.

Positivität: • $\|f\|_1 \geq \|f\|_0 \geq 0$

• $\|0\|_1 = 0$ klar. Ist umgekehrt $\|f\|_1 = 0$, so gilt wegen $0 \leq \|f\|_0 \leq \|f\|_1 = 0$ auch $\|f\|_0 = 0$ und deshalb $f = 0$

Homogenität:

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_1 &= \|\lambda f\|_0 + \sup\{\underbrace{|(\lambda f)'(x)|}_{=|\lambda|\cdot|f'(x)|} \mid x \in [a,b]\} \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_0 + |\lambda| \cdot \sup\{|f'|(x)| \mid x \in [a,b]\} = |\lambda| \cdot \|f\|_1.\end{aligned}$$

Dreiecksungleichung:

$$\|f+g\|_1 = \underbrace{\|f+g\|_0}_{\leq\|f\|_0+\|g\|_0} + \sup\underbrace{\{|(f'+g)'(x)|}_{\substack{=|f'(x)+g'(x)| \\ \leq|f'(x)|+|g'(x)|}} \mid x \in [a,b]\} \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

2. Grundlagen metrischer Räume.

Belege die folgenden Aussagen *durch jeweils ein Beispiel*:

(a) Es gibt einen metrischen Raum, in dem jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen ist. *(2 Punkte)*

(b) Der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. *(2 Punkte)*

(c) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Sei X eine beliebige Menge (eine konkrete Wahl von X ist auch o.k.) und für $x, y \in X$

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Dies ist eine Metrik auf X, die sogenannte *diskrete Metrik.* Sei $M \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge, so gilt für jedes $x \in M$, dass

$$B\Big(x, \frac{1}{2}\Big) = \{x\} \subseteq M.$$

Also ist M offen. Weil also auch das Komplement M^c der beliebigen Teilmenge M offen ist, ist M auch abgeschlossen.

(b) Sei $X := \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik und $O_n := (-1, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist O_n offen und es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = (-1, 0]$. (Argument mit Satz v. Eudoxos 2.38(ii)). Dieser Schnitt ist weder offen noch abgeschlossen.

(c) Sei $V = \bigcup V_k$ und $x \in V$. Also gibt es ein V_j so dass $x \in V_j$. V_j ist offen. Das heißt, es gibt ein Ball $B(x, \epsilon) \subset V_j$ und daher $B(x, \epsilon) \subset V$. Nach Definition 9.13 ist V offen.

3. Wie man aus Metriken weitere konstruiert.

Gegeben seien eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X sowie eine monoton steigende Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und der Eigenschaft

$$\forall\, t, s \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ f(t+s) \leq f(t) + f(s)\ .$$

(a) *Zeige,* dass dann

$$\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(d(x, y))$$

eine weitere Metrik auf X ist. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}$ die Voraussetzungen erfüllt. *(3 Punkte)*

(c) *Folgere* aus (a) und (b), dass durch $\widetilde{d}(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(1 Punkt)*

Man sieht, dass $\tilde{d}(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in X$.

Lösung.

(a) Weise für $\tilde{d}$ die Eigenschaften aus Df. 9.1 nach:

Positität:
- $\tilde{d}(x, y) = f(d(x, y)) \geq 0$. (Beachte Wertebereich von f)
- Wegen $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ist

$$\tilde{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow f(d(x, y)) = 0 \Longleftrightarrow d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

Symmetrie:

$$\tilde{d}(y, x) = f(d(y, x)) = f(d(x, y)) = \tilde{d}(x, y).$$

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x, y) + \tilde{d}(y, z) &= f(d(x, y)) + f(d(y, z)) \geq f(\underbrace{d(x, y) + d(y, z)}_{\geq d(x,z)})\\ &\geq f(d(x, z)) = \tilde{d}(x, z).\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt, da f monoton wachsend

(b) Für $t \geq 0$ gilt offenbar $f(t) \geq 0$, außerdem $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Zudem ist f ist streng monoton wachsend, da

$$f'(t) = \frac{1 \cdot (1+t) - t \cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0.$$

Weiter gilt für $t, s \in \mathbb{R}_0^+,\ t, s \geq 0$:

$$f(t+s) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = f(t) + f(s)$$

und somit $f(t+s) \leq f(t) + f(s)$.

(c) Es ist $\tilde{d}(x,y) = f(d(x,y))$, wobei f die Funktion aus (b) und $d(x,y) = |x-y|$ die übliche Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

Da f nach (b) die Voraussetzungen von (a) erfüllt, ist nach (a) $\tilde{d}$ eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}$.