Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

16. Juni 2021

Bonuszettel

101. Metrik und Norm.

(a) Sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ und für $x, y \in \mathbb{R}^2$ definiere man

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2, & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden durch den Ursprung liegen,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Warum wird diese Metrik auch mit Metrik der französischen Eisenbahn bezeichnet?

(b) Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$, das heißt

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Zeige, dass $\mathbb{R}[x]$ ein Vektorraum ist.

(ii) Für $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ definiere man $\|p\| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Zeige, dass durch $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}[x]$ definiert ist.

(2+1+1 Bonuspunkte)

102. Metriken.

(a) Man *beweise* oder *widerlege*, dass durch

$$d(x,y) := (x-y)^2$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(b) *Zeige*, dass durch die Einschränkung der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ auf die Vereinigung der Inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ wegen

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

eine Metrik auf $\overline{\mathbb{N}}$ gegeben ist durch

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm},\ d(n,\infty) = d(\infty,n) = \frac{1}{n},\ d(\infty,\infty) = 0.$$

(1 + 2 Bonuspunkte)

103. Grundlagen metrischer Räume.

(a) Gebe ein *Beispiel* für eine Menge A in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, die weder offen noch abgeschlossen ist.

(b) Sei A eine Menge in einem metrischen Raum X. Dann ist ein Punkt $x_0 \in A$ genau dann ein *innerer Punkt* von A, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, die ganz in A enthalten ist. Das *Innere* A° von A ist definiert als die Menge aller inneren Punkte von A und ihr *Rand* ∂A als $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$.

(i) *Zeige*, dass die Menge A genau dann offen ist, wenn $A = A^\circ$.

(ii) *Zeige*, dass die offenen Mengen äquivalenter Normen übereinstimmen.

(iii) *Bestimme* das Innere, den Abschluß und den Rand der folgenden Mengen im $\mathbb{R}^n$:

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < 1,\, x_i \in \mathbb{Q}, i = 1 \dots n\},$$
$$A_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1, x_1 = 0\}.$$

(1 + 1 + 2 + 2 Bonuspunkte)

104. Häufungspunkte und Abgeschlossenheit.

Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(a) Bestimme alle Häufungspunkte der Menge M.

(b) Ist M abgeschlossen?

(c) Ist M kompakt?

(2 + 1 + 1 Bonuspunkte)

105. Äquivalente Normen.

Es sei V ein normierter Vektorraum und $\|\cdot\|_a : V \to \mathbb{R}$ sowie $\|\cdot\|_b : V \to \mathbb{R}$ zwei zueinander äquivalente Normen auf V. Sei außerdem $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in V, die in der Norm $\|\cdot\|_a$ gegen ein $z \in V$ konvergiert. Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in der Norm $\|\cdot\|_b$ konvergiert.

(2 Bonuspunkte)

106. Funktionenfolgen.

Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : X \to X'$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f : X \to X'$ konvergiert. Zeige:

(a) Ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, so ist auch f beschränkt.

(b) Ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig, so ist auch f stetig (siehe Beweis in Analysis I).

(2 + 1 Bonuspunkte)

107. Stetigkeit.

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^m$, d.h. für $x = (x_1, \dots, x_m)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$ ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

(a) Zeige, dass die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$$

stetig ist.

(b) Gebe unstetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an, für die h trotzdem stetig ist.

(1 + 1 Bonuspunkte)

108. Stetigkeit. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Betrachte den metrischen Raum (Y, d)

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 2, 1 \leq |y| \leq 2\}.$$

als metrischen Unterraum von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$

(a) Zeige, dass Y kompakt ist.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : Y \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$$

gleichmäßig stetig ist.

(1 + 1 Bonuspunkte)

109. Die Menge der linearen invertierbaren Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$.
Sei

$$M := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \mid \exists B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) : AB = BA = \mathbb{1}\}.$$

(a) Zeige, dass M offen in $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist.
Hinweis: Benutze, dass für $A \in M$ gilt, dass $A + B = A(\mathbb{1} + A^{-1}B)$ gilt und verwende die Neumannsche Reihe.

(b) Zeige, dass M dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist.
Hinweis: Betrachte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda\mathbb{1} - A)$.

(3 + 2 Bonuspunkte)

110. Wiederholung zur linearen Algebra.
Gegeben seien zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und sei $f : V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die n Vektoren $w_1 = f(v_1), \ldots, w_n = f(v_n)$ aus W (vgl. lineare Algebra). Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) f ist injektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$.

(b) f ist surjektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ bilden ein Erzeugendensystem von W.

(2 + 2 Bonuspunkte)

111. Lineare Operatoren

Seien $X \neq \{0\}$ ein normierter Raum und $A, B : X \to X$ lineare Abbildungen, mit $A \circ B - B \circ A = \mathbb{1}$.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (hier bedeutet B^n das $n-$fache anwenden von B):

$$A \circ B^n - B^n \circ A = nB^{n-1}.$$

(b) folgere aus (a), dass mindestens eine der linearen Abbildungen A, B nicht stetig ist. [Tipp: man schätze die rechte Seite der Gleichung aus (a) gewinnbringend ab. Benutze außerdem, dass $\|A \circ B\| \leq \|A\|\|B\|$.

(1 + 2 Bonuspunkte)

112. Anschauliche lineare Operatoren.

(a) Finde einen linearen Operator $A_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, der die Spiegelung eines Punktes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

an der x-Achse darstellt.

(b) Finde eine Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass das Bild der linearen Abbildung

$$A_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

die Ebene in $\mathbb{R}^3$ beschreibt, die durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

(1 + 1 Bonuspunkte)

113. Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit.

(a) Für welche Punkte $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sind die durch

(i) $f_1(x) = |x_1 x_2| + |x_3|$

(ii) $f_2(x) = |x_1 x_2 x_3|^{1/3}$

definierten Funktionen $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar bzw. differenzierbar?

(b) Sei $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Prüfe, ob $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(c) Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 - 2y^2$$

im Punkt $(1, 2)$ in Richtung eines Vektors, der mit der positiven x-Achse einen Winkel von $\pi/4$ bildet.

(2 + 1 + 1 Bonuspunkte)

114. Richtungsableitungen, kritische Punkte und Gradient.

(a) Berechne die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^3 + e^y \cdot \sin(z)$$

an der Stelle $x_0 = (1, \log 3, \frac{\pi}{3})$ in Richtung $v = (3, -2, 6)$.

(b) Berechne den Gradienten und bestimme alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - x,$

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz.$

(1 + 4 Bonuspunkte)

115. Richtungsableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in jede Richtung differenzierbar ist und berechne die zugehörige Richtungsableitung.

(b) Zeige, dass f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht differenzierbar ist.

(2 + 1 Bonuspunkte)

116. Richtungsableitungen.

Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen und $f : U \to Y$ differenzierbar in x_0. Für $x_1 \in X$ ist die Abbildung $x : \mathbb{R} \to X$, $t \mapsto x(t) = x_0 + tx_1$ differenzierbar mit $x'(t) = x_1$.

(a) **(i)** Erläutere, warum es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x^{-1}[U]$.

(ii) Zeige, dass die Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$, $t \mapsto f(x(t))$ bei $t = 0$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung [Per Definitionem stimmt diese Ableitung nun mit der Richtungsableitung in x_0 in Richtung x_1 überein.]

(b) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2+y^4}{x^3+xy^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion ist offenbar für alle (x, y) mit $x \neq 0$, differenzierbar. Folgere aus Aufgabenteil (a), dass diese Funktion nicht in $(0, 0)$ differenzierbar ist.

(1 + 2 + 1 Bonuspunkte)

117. Ableitung von Potenzreihen.

Sei X ein Banachraum und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $\rho > 0$. Zeige, dass die Abbildung

$$f : B(0,\rho)_{\mathcal{L}(X)} \to \mathcal{L}(X),\ A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, A^n$$

in $0 \in \mathcal{L}(X)$ differenzierbar ist und berechne $f'(0)$. Hierbei bezeichnet $B(0,\rho)_{\mathcal{L}(X)}$ den Ball vom Radius ρ um 0 in $\mathcal{L}(X)$.

Tipp: Es ist nicht schwer, die "lineare Approximation" von f an der Stelle $A = 0$ zu raten. Außerdem beachte man, dass die reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}|\, x^n$ ebenfalls den Konvergenzradius ρ besitzt. *(3 Bonuspunkte)*

118. Lokale Extrema.

Bestimme alle lokalen Extrema der folgenden Funktionen und entscheide jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^3 + xy^2 - x,$

(b) $g : (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y).$

(2 + 2 Bonuspunkte)

119. Extrema. Man untersuche die folgende Funktion auf lokale Extrema.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

(2 Bonuspunkte)

120. Rotation und Divergenz.

Gegeben seien die folgenden Vektorfelder:

$$u(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere die Vektorfelder u, v und w.

(b) Berechne die Rotation der Vektorfelder u und v und interpretiere das Ergebnis anhand der Skizze.

(c) Berechne die Divergenz des Vektorfeldes w und interpretiere das Ergebnis anhand der Skizze.

(1 + 1 + 1 Bonuspunkte)

121. Ein Sattelpunkt. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2$.

(a) Skizziere den Graphen von f.

(b) Bestimme den einzigen kritischen Punkt von f.

(c) Prüfe, ob dort ein lokales Minimum oder Maximum (oder weder noch) vorliegt.

(1 + 1 + 1 Bonuspunkte)

122. Mehrdimensionales Ableiten.

(a) Bestimme die Extrema der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:

(i) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 + 27$,

(ii) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 1$.

(b) Berechne das Taylor-Polynom um zweiter Ordnung um $(x, y) = (1, 1)$ von

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}.$$

(2 + 2 + 2 Bonuspunkte)

123. Satz der inversen und Satz der impliziten Funktion.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ \exp(y) \end{pmatrix}$.

(i) Zeige, dass f in jedem Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lokal umkehrbar ist.

(ii) Berechne $\left(f^{-1}\right)' \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(1) \end{pmatrix}$.

(b) Bestimme alle Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, in denen die Gleichung

$$\exp(y) + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$$

lokal in der Form $y = g(x)$ auflösbar ist.

(1 + 1 + 1 Bonuspunkte)

124. Zum Banachschen Fixpunktsatz.

Betrachte die folgenden Abbildungen in $\mathbb{R}$. Überprüfe die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes und untersuche die Abbildungen hinsichtlich der Existenz von Fixpunkten.

(a) $f : M \to M$ mit $M = (0,1)$ und $f(x) = \frac{x}{2}$,

(b) $f : M \to M$ mit $M = \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$,

(c) $f : M \to N$ mit $M = [0,1]$ und $N = [2,3]$,

(d) $f : M \to M$ mit $M = [-1,1]$ und $f(x) = \frac{e^x}{3}$.

(4 Bonuspunkte)

125. Extremwerte unter Nebenbedingungen.

(a) Prüfe, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \exp(x+y)$$

unter der Nebenbedingung $xy = 0$ lokale Extremwerte besitzt besitzt und bestimme diese gegebenenfalls.

(b) Bestimme die Maxima und Minimima des Polynoms

$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Kreisscheibe $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(*Hinweis:* Berechne zunächst die lokalen Extrema von f im Innern von K und dann auf dem Rand von K, d.h. unter der Gleichungsnebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.)

(c) Zerlege die reelle Zahl $a > 0$ so in drei positive Summanden, dass deren Produkt maximal ist.

(d) Bestimme mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus den euklidischen Abstand des Punktes $x^* := (1,-1,0)^T \in \mathbb{R}^3$ zum Rotationshyperboloid

$$M := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

(2 + 2 + 1 + 2 Bonuspunkte)

126. Lagrangemultiplikatoren.

Sei

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^4 = x^3 - x^4\}$$

(a) Zeige, dass M kompakt ist. [Tipp: zeige zunächst, dass $|x| \leq 1$ für alle $(x,y) \in M$ gilt.]

(b) Weil nun M kompakt ist hat die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to R^2, \quad (x,y) \mapsto y$$

ein Maximum und Minimum. Bestimme diese. [Achtung: auch mögliche Singularitäten der Niveaumenge, also Punkte wo $\nabla g(x,y) = 0$, wobei $g(x,y) = y^4 - x^3 - x^4$ kommen als mögliche Kandidaten für Extrema infrage.]

(1 + 2 Bonuspunkte)

127. Nullmengen.

(a) Zeige:

(i) $M_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ist keine Nullmenge.

(ii) $M_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine Nullmenge.

(iii) $M_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ ist eine Nullmenge.

(iv) $M_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 1\}$ ist keine Nullmenge.

(v) $M_5 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ ist eine Nullmenge.

[*Tipp:* Für einige der Aufgaben könnt ihr die Aufgabe 34 vom aktuellen Zettel benutzen.]

(b) Ist der Rand einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit der Standardmetrik) immer eine Nullmenge?

(c) Zeige mit Hilfe der bekannten Aussagen über Nullmengen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

(5 + 1 + 1 Bonuspunkte)

128. Nullmengen.

(a) Zeige, dass das Bild $f[A]$ einer Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ unter eine lipschitzstetigen Abbild $f : A \to \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge ist. [Tipp: Zeige zuerst, dass wenn eine für die Menge A entsprechende Folge von endlichen Quadern gefunden wurde, dass diese Quader auch ohne Einschränkung als Würfel betrachtet werden können (d.h. dass alle Kantenlängen gleich sind). Im zweiten Schritt ist es dann einfacher die Lipschitzstetigkeit unter $\|\cdot\|_\infty$ zu betrachten].

(b) Sei nun $f : U \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Funktion einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^d$ und $A \subset U$ eine Nullmenge. Zeige, dass $f(A)$ auch eine Nullmenge ist.

(3 + 2 Bonuspunkte)

129. Treppenfunktionen. Finde monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen, die fast überall gegen die Funktion konvergiert. Sind die Funktionen Lebesgueintegrable?

(a) $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x) + \chi_{(-1,1)}(x)$.

(b) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k,k+1)}(x)$.

(c) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{(0,1/k]}(x)$.

(d) $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \exp(x)$.

(e) $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \cdot x$.

(f) $f(x) = x$.

(6 Bonuspunkte)

130. Lebesgue-Integrierbarkeit.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \chi_{[n-1,n)}(x)$$

nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Tipp: Wie sieht der Graph von f aus? Finde einen einfachen Ausdruck für $|f|$ und zeige, dass $|f|$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. Warum ist dann f nicht Lebesgue-integrierbar?

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \in (0, \infty), \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

zwar uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

(c) Es sei $q \in (0, 1)$, $I_n := \left[n, n + \frac{q^n}{n}\right]$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n, \text{ falls } x \in I_n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0, \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n. \end{cases}$$

Zeige, dass $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq 0$ und bestimme $\int f \, d\mu$.

(2 + 2 + 2 Bonuspunkte)

131. Lebesgueintegration.

Seien $\Delta^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \quad \text{und} \quad x + y \leq 1\}$ das Standard "2-Simplex" und $n, m \in \mathbb{N}$. Berechne das folgende Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^2} x^{n-1} y^{m-1} \chi_{\Delta^2} \mathrm{d}\mu$$

2 Bonuspunkte)

132. Lebesgue-Theorie.

Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Zeige*:

$$\lim_{r \to 0+} \int_{[0,r]} f \, \mathrm{d}\mu = 0 \,.$$

Tipp: Es genügt zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_n > 0$ gilt: $\lim_{n \to \infty} \int_{[0,r_n]} f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Dies kann mit Hilfe von Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz gezeigt werden.

(2 Bonuspunkte)

133. Kugelkoordinaten.

Berechne die Jacobi-Matrix und die Determinante der Jacobi-Matrix der durch

$$v(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

definierten Abbildung $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. In welchen Punkten (r,θ,φ) ist die Jacobimatrix regulär? Zwischen welchen Teilmengen Urbild- und Bild- bereich sind diese Abbildungen jeweils bijektiv?

(3 Bonuspunkte)

134. Nochmal mehrdimensionale Integration.

Sei $B^3(0,R) \subset \mathbb{R}^3$ der Ball um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ mit Radius $R > 0$ und $S^2 = \partial B^3(0,1)$.

(a) Berechne das Volumen von $B^3(0,R)$,

(b) Berechne das Integral $\int_{B^3(0,R)} \exp(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\, d\mu$.

(c) Berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Integral

$$\int_{S^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + y + z\right) d\mu$$

Tipp: Verwende, falls notwendig, die Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ mit Radius $r > 0$ und Winkeln $\theta \in [0,\pi]$ sowie $\varphi \in [0,2\pi]$.

(2 + 2 + 2 Bonuspunkte)

135. Jacobische Integrationsformel.

(a) Wir betrachten die Parametertransformation

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (t,s) \mapsto (x,y) \text{ mit } x = \tfrac{1}{3}(t+s) \text{ und } y = \tfrac{1}{3}(2t-s)$$

sowie das Integrationsgebiet

$$O := \{\, \Phi(t,s) \,|\, 0 < t < 1 \text{ und } 0 < s < 1 \,\}\,.$$

Berechne durch Anwendung der Jacobischen Transformationsformel für die Transformation Φ das Integral

$$\int_O (x+y)^{2021} \cdot \exp(2x-y)\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel erfüllt sind.

(b) Gegeben sei die *Spirale des Archimedes*, welche durch die Kurve der Abbildung

$$f : [0,3\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto f(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (\varphi\cos(\varphi), \varphi\sin(\varphi))$$

beschrieben wird.

Sei O die offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, welche von der Kurve von $f|_{[0,\pi]}$ und $f|_{[2\pi,3\pi]}$ sowie $y = 0$ begrenzt wird und die in der Skizze auf der nächsten Seite grau dargestellt wird. Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi), \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

bildet die Menge

$$U := \{(\varphi, r) \mid \varphi \in (0, \pi),\ \varphi < r < \varphi + 2\pi\}$$

bijektiv auf O ab.

(i) *Skizziere* die Menge U und *bestimme* auf welche Teile des Randes von O die Kanten von U durch Φ abgebildet werden.

(ii) *Bestimme* den Flächeninhalt von O. Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Sätze, die angewandt werden, erfüllt sind.

(2 + 2 + 2 Bonuspunkte)

136. Gaußscher Satz.

(a) Berechne $\int_{\partial Z} v \cdot N \, d\sigma$ für das Zylindergebiet

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 5, x^2 + y^2 < 9\}$$

und das Vektorfeld $v(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$. Hierbei darf verwendet werden, dass der Gaußsche Satz auch für Gebiete mit stückweisem C^2-Rand gilt.

(b) Seien $a, b, c > 0$ und

$$E := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\right\}.$$

Berechne

$$\int_{\partial E} u \cdot N \, d\sigma$$

für das Vektorfeld $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z)^T \mapsto (x, y, z)^T$.

(2 + 2 Bonuspunkte)

137. Berechnung von Flächeninhalten mit dem Satz von Gauß.

Zeigen Sie, dass das elliptische Paraboloid

$$P = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, x, y \in [-1, 1]\}$$

und das Hyperboloid

$$H = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = z, x, y \in [-1, 1]\}$$

als Flächen im $\mathbb{R}^3$ den gleichen Flächeninhalt besitzen. Wieder darf verwendet werden, dass der Gaußsche Satz auch für Gebiete mit stückweisem C^2-Rand gilt. *(3 Bonuspunkte)*

Tipp: Es ist nicht nach dem konkreten Inhalt der Flächen gefragt.