Anhang B

Der kleine Riemannsche Abbildungssatz

Der „kleine" Riemannsche Abbildungssatz ist die Vorstufe des großen Riemannschen Abbildungssatzes (Theorem 2.42), die einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{C}$ behandelt. Weil dieser Satz thematisch zur Funktionentheorie I gehört, skizzieren wir ihn und seinen Beweis in diesem Anhang.

B.1 Theorem. Jedes einfach zusammenhängende (oder planare, Definition 2.29) Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das nicht gleich $\mathbb{C}$ ist, ist biholomorph äquivalent zur Kreisscheibe $\mathbb{D} = B(0,1)$.

Für den Beweis werden die folgenden Aussagen über holomorphe Abbildungen $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ benötigt:

B.2 Aufgabe. (a) Eine Möbius-Transformation $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ (siehe Aussage 1.38(a)) bildet genau dann $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ ab, wenn f in der Form

$$f : z \mapsto e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0\, z}$$

mit $z_0 \in \mathbb{D}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

(b) Zu beliebigen $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ existiert ein $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ mit $f[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ und $f(z_0) = z_1$.

(c) *(Lemma von Schwarz-Pick.)* Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, so gilt für alle $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \ .$$

In dieser Ungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn f eine Möbius-Transformation gemäß (a) ist.

Beweis des kleinen Riemannschen Abbildungssatzes Theorem B.1. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann planar, wenn es einfach zusammenhängend ist, und diese Eigenschaft ist genau dann erfüllt, wenn jede holomorphe Funktion auf G eine Stammfunktion besitzt. Der weitere Beweis erfolgt in drei Schritten.

1. Schritt. Wir zeigen, dass G biholomorph äquivalent ist zu einem Gebiet $\tilde{G}$ mit $0 \in \tilde{G} \subset \mathbb{D}$. Wegen $G \neq \mathbb{C}$ können wir durch Translation erreichen, dass $0 \notin G$ gilt. Weil G einfach zusammenhängend ist, gibt es auf G einen Zweig des Logarithmus, d.h. eine holomorphe Funktion

$$\lambda : G \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad e^{\lambda(z)} = z \quad \text{für } z \in G \ .$$

Die holomorphe Funktion $w : G \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{\frac{1}{2}\lambda(z)}$ ist dann offenbar ein „Zweig der Quadratwurzel“, d.h. es gilt $w(z)^2 = z$ für $z \in G$. Aus letzterer Beziehung folgt auch die Injektivität von w, und ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.37 gilt $w[G] \cap (-w[G]) = \varnothing$. Weil $-w[G]$ nach dem Satz von der Gebietstreue offen ist, gibt es ein $w_0 \in w[G]$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B(-w_0, \varepsilon)} \subset -w[G] \subset \mathbb{C} \setminus w[G]$. Dann bildet die injektive holomorphe Abbildung $z \mapsto \frac{\varepsilon}{w(z)+w_0}$ das Gebiet G auf ein Gebiet $\tilde{G} \subset \mathbb{D}$ ab. Nach Aufgabe B.2(b) kann hinter diese Abbildung eine Möbius-Transformation geschaltet werden, um $0 \in \tilde{G}$ zu erreichen.

2. Schritt. Wegen dem 1. Schritt können wir nun zusätzlich $0 \in G \subset \mathbb{D}$ voraussetzen. Wir untersuchen in diesem Schritt injektive holomorphe Funktionen $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und zeigen die folgende Aussage: Ist ein solches f nicht surjektiv, so existiert eine injektive holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{D}$ mit $|F'(0)| > |f'(0)|$.

Die holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ sei also injektiv, aber nicht surjektiv. Weil f nicht surjektiv ist, gibt es ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus f[G]$. Wir betrachten die Möbius-Transformation

$$\Phi_0(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0\, z}\ ,$$

die nach Aufgabe B.2(a) $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ abbildet. Für das einfach zusammenhängende Gebiet $\tilde{G} = (\Phi_0 \circ f)[G] \subset \mathbb{D}$ gilt $0 = \Phi_0(z_0) \notin \tilde{G}$, also gibt es wie im 1. Schritt einen holomorphen Zweig der Quadratwurzel $w : \tilde{G} \to \mathbb{C}$. Offenbar ist $w[\tilde{G}] \subset \mathbb{D}$. Es ist $-z_0 = (\Phi_0 \circ f)(0) \in \tilde{G}$, und wir setzen

$$z_1 = w(-z_0) \in \mathbb{D} \quad \text{und} \quad \Phi_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1\, z}\ .$$

Die Möbius-Transformation Φ_1 bildet ebenfalls nach Aufgabe B.2(a) $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ ab, und es gilt $\Phi_1(z_1) = 0$. Nun definieren wir

$$F(z) = (\Phi_1 \circ w \circ \Phi_0 \circ f)(z) \quad \text{für } z \in G\ .$$

Die holomorphe Abbildung $F : G \to \mathbb{D}$ ist injektiv mit $F(0) = 0$. Für die holomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ z \mapsto \Phi_0^{-1}\big((\Phi_1^{-1}(z))^2\big)$$

gilt

$$h(0) = \Phi_0^{-1}(z_1^2) = \Phi_0^{-1}\big(w(-z_0)^2\big) = \Phi_0^{-1}(-z_0) = 0$$

und

$$h \circ F = \Phi_0^{-1} \circ w^2 \circ \Phi_0 \circ f = f\ .$$

Weil die holomorphen Abbildungen $\widehat{C} \to \widehat{C},\ z \mapsto z^2$ und $\frac{1}{z} \mapsto \frac{1}{z^2}$ nicht injektiv sind, ist auch h nicht injektiv, also sicher nicht (Einschränkung einer) Möbius-Transformation. Aus dem Schwarzschen Lemma folgt daher $|h'(0)| < 1$ und daher

$$|f'(0)| = |h'(0)\, F'(0)| = |h'(0)| \cdot |F'(0)| < |F'(0)|\ .$$

3. Schritt. Sei $\mathcal{F}$ die Menge der injektiven holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$. Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ ein Element f enthält, für das $|f'(0)|$ maximal ist. Wegen dem 2. Schritt ist dieses f surjektiv, und damit eine biholomorphe Abbildung $G \to \mathbb{D}$.

Zunächst bemerken wir, dass $\mathcal{F} \neq \varnothing$ ist, denn die Inklusionsabbildung $G \hookrightarrow \mathbb{D}$ liegt in $\mathcal{F}$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset G$. Für $f \in \mathcal{F}$ gilt dann nach der Cauchyschen Ungleichung $|f'(0)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Daher hat die Menge

$$\{|f'(0)| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

ein endliches Supremum $s_0 \in [1,\infty)$. Somit existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ mit $\lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| = s_0$. Außerdem gilt jeweils $|f_n(z)| \leq 1$ für alle $z \in G$. Nach dem Satz von Montel (Aussage 2.34) gibt es eine Teilfolge von (f_n), die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß konvergieren auch die Ableitungen kompakt gleichmäßig gegen die Ableitungen von f. Deshalb ist $|f'(0)| = s_0$. Daher ist die Abbildung f nicht konstant, und daher nach dem Satz von „nullstellenzählenden Integral" injektiv. Das Bild von f ist nach dem Satz von der Gebietstreue eine offene Menge, die in $\bar{\mathbb{D}}$ enthalten ist, und daher in $\mathbb{D}$ enthalten. Also ist $f \in \mathcal{F}$, und $|f'(0)|$ ist in $\mathcal{F}$ maximal. □

Aus dem Beweis des kleinen Riemannschen Abbildungssatzes ergibt sich auch:

B.3 Korollar. Jede biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist Einschränkung einer Möbius-Transformation, und daher von der in Aufgabe B.2(a) beschriebenen Gestalt.

Beweis. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph. Nach Aufgabe B.2(b) existiert eine Möbius-Transformation $g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ mit $g[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ und $g(f(0)) = 0$. Die biholomorphe Abbildung $h := g \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ erfüllt $|h'(0)| \leq 1$ nach dem Lemma von Schwarz. Andererseits haben wir im Beweis des kleinen Riemannschen Abbildungssatzes (Theorem B.1) gesehen, dass eine derartige Abbildung genau dann surjektiv ist, wenn $|h'(0)|$ maximal, also hier $= 1$ ist. Dies bedeutet nach der Gleichheitsdiskussion im Lemma vom Schwarz, dass $h(z) = e^{i\varphi} \cdot z$ mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$ ist, also h insbesondere eine Möbius-Transformation ist. Damit ist auch $f = g^{-1} \circ h$ eine Möbius-Transformation. □