

Wir wählen einen Divisor $P \in \text{Div}(X)$ mit $\deg(P) = 1$ sowie ein zunächst beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir $D_n = D - nP$ und betrachten den Vektorraum $\Lambda = \{\psi \lambda \mid \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})\}$. Damit ist Λ ein Unterraum von $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$. Man kann zeigen (siehe [Fo, Lemma 17.8]), dass die Abbildung $H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \rightarrow \Lambda, \psi \mapsto \psi \lambda$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Folglich gilt nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56):

$$\dim \Lambda = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \geq \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) - i(nP) = 1 - g + \deg(nP) = 1 - g + n,$$

wobei g das Geschlecht von X ist. Nach Lemma 3.71 ist $\iota_{D_n} : H^0(X, \Omega_{-D_n}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ injektiv, also gilt für das Bild $\text{im}(\iota_{D_n}) \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ nach Aussage 3.60

$$\dim \text{im}(\iota_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \geq -\deg(D_n) + k_0 = n + k_0 - \deg(D).$$

und somit

$$\dim \Lambda + \dim \text{im}(\iota_{D_n}) \geq 2n + (k_0 + 1 - g - \deg(D)). \quad (\odot)$$

Ist $n > \deg(D)$, so ist $\deg(D_n) < 0$ und deshalb $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$. In dieser Situation zeigt der Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56):

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg(D_n) = n + (g - 1 - \deg(D)).$$

Durch Vergleich mit (\odot) ergibt sich: Wählt man $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so gilt

$$\dim \Lambda + \dim \text{im}(\iota_{D_n}) > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

Da sowohl Λ als auch $\text{im}(\iota_{D_n})$ Untervektorräume von $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ sind, folgt daraus, dass $\Lambda \cap \text{im}(\iota_{D_n}) \neq 0$ ist. Also existiert $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, $\psi \neq 0$ und $\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$ mit $\iota_{D_n}(\omega_0) = \psi \lambda$. Dann ist $\omega = (1/\psi)\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D})$. Man kann nun zeigen, dass $\iota_D(\omega) = \lambda$ ist, siehe [Fo, Lemma 17.7]. \square

3.14 Verzweigte Überlagerungen und der Satz von Riemann-Hurwitz

Es ist schon gelegentlich angedeutet worden, dass nicht-konstante holomorphe Abbildungen f zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen sogenannte *verzweigte Überlagerungen* sind, und wahrscheinlich hätten wir schon längst genauer über diesen Punkt reden sollen. Jetzt ist noch einmal eine gute Gelegenheit dafür, denn der *Satz von Riemann-Hurwitz*, der aus dem Satz von Riemann-Roch und der Serre-Dualität folgt, handelt von dieser Situation. Er beschreibt einen Zusammenhang zwischen den Geschlechtern von der beiden beteiligten Riemannschen Flächen mittels der Blätterzahl der verzweigten Überlagerung f .

3.72 Aussage und Definition. Seien X, Y zwei Riemannsche Flächen, $f : X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung, $x \in X$ und $y = f(x) \in Y$. Dann existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$, und Karten (U, z) von X mit $x \in U$ und $z(x) = 0$ bzw. (V, w) von Y mit $y \in V$ und $w(y) = 0$, so dass

$$w \circ f = z^n \quad \text{auf } U$$

ist.

Wir sagen in dieser Situation, dass f in x den Wert y mit der Vielfachheit n annimmt, oder in x die Vielfachheit n hat [f has multiplicity n at x]. Die Zahl $(n - 1)$ bezeichnen wir mit $b_f(x)$, sie heißt die *Verzweigungszahl* [branch number] von f in x .

3.73 Beispiel. Ist in der Situation von Aussage 3.72 $Y = \mathbb{C}$, so ist die Vielfachheit $n = b_f(x) + 1 = \text{ord}_x(f - y)$.

Beweis von Aussage 3.72. Wir wählen holomorphe Karten \tilde{z} von X um x mit $\tilde{z}(x) = 0$ und w von Y um y mit $w(y) = 0$, und betrachten die Taylorreihe von $w \circ f$

$$w \circ f = \sum_{k \geq n} c_k \tilde{z}^k \quad \text{mit } n > 0, c_k \in \mathbb{C}, c_n \neq 0.$$

In dieser Situation ist $g(\tilde{z}) = \sum_{k \geq 0} c_{n+k} \tilde{z}^k$ eine in der Nähe von x nullstellenfreie, holomorphe Funktion, die daher lokal bei x eine n -te Wurzel $h(\tilde{z})$ besitzt, es gilt also $h(\tilde{z})^n = g(\tilde{z})$. Das Definitionsgebiet von h kann dabei so gewählt werden, dass h nullstellenfrei ist. Damit gilt

$$w \circ f = \tilde{z}^n \cdot g(\tilde{z}) = (\tilde{z} h(\tilde{z}))^n = z^n \quad \text{mit } z = \tilde{z} \cdot h(\tilde{z}).$$

Dabei ist z in der Nähe von x eine weitere holomorphe Karte mit $z(x) = 0$, so dass die Bedingung der Aussage erfüllt ist. Es ist offensichtlich, dass die Zahl n nicht von der Wahl der Karten z und w abhängt. \square

3.74 Aussage. Seien X, Y zwei kompakte Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung. Dann existiert eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass jedes $y \in Y$ von f mit Vielfachheiten gezählt genau m -mal angenommen wird, das soll heißen: Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) = m.$$

Die Zahl m heißt der *Grad* [degree] von f . Wir sagen (per Definition), dass f eine *verzweigte, m -blättrige Überlagerung* [branched m -sheeted covering (map)] von X über Y ist.

In der Situation dieser Aussage ist die Menge

$$S := \{x \in X \mid \exists x' \in f^{-1}[\{f(x)\}] : b_f(x') \neq 0\} = \{x \in X \mid \#f^{-1}[\{f(x)\}] < m\}$$

diskret und daher endlich. $f|_{X \setminus S} : X \setminus S \rightarrow Y \setminus f[S]$ ist dann eine m -blättrige, holomorphe Überlagerung im Sinne von Abschnitt 1.4, dadurch wird die Bezeichnung „verzweigte Überlagerung“ für f gerechtfertigt. Die Punkte von S oder von $f[S]$ heißen *Verzweigungspunkte* [branching points, ramification points] von f . Aus der Endlichkeit von S folgt auch, dass die *totale Verzweigungsordnung* [total branching order]

$$b_f := \sum_{x \in X} b_f(x)$$

endlich ist.

Beweis von Aussage 3.74. Weil f holomorph und nicht konstant ist, ist f eine offene Abbildung, und daher ist $f[X]$ sowohl kompakt als auch offen in Y . Somit ist jedenfalls $f[X] = Y$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die Menge

$$S_n = \left\{ y \in Y \mid \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) \geq n \right\}.$$

Wegen Aussage 3.72 ist S_n offen. Wir werden gleich sehen, dass S_n auch abgeschlossen ist. Daraus folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ jeweils entweder $S_n = \emptyset$ oder $S_n = Y$ gilt. Wegen $f[X] = Y$ ist offensichtlich

$$Y = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots,$$

andererseits ist die Menge $f^{-1}[\{y\}]$ für jedes $y \in Y$ endlich und es ist $b_f(x)$ endlich für jedes $x \in X$; deshalb kann nicht $S_n = Y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ sein. Also gibt es ein maximales $m \in \mathbb{N}$, so dass $S_m = Y$ ist. Für dieses gilt $S_{m+1} = \emptyset$, und deshalb erfüllt dieses m die Eigenschaft der Aussage.

Es verbleibt zu zeigen, dass S_n abgeschlossen ist. Dazu sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in S_n , die gegen ein $y \in Y$ konvergiert. Weil es nur endlich viele $y \in Y$ gibt, für die $b_f(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in f^{-1}[\{y\}]$ gilt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $b_f(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in f^{-1}[\{y_k\}]$ ist. Also besteht $f^{-1}[\{y_k\}]$ jeweils aus mindestens n verschiedenen Punkten von X . Es seien also $x_{k,1}, \dots, x_{k,n} \in f^{-1}[\{y_k\}]$ paarweise verschieden. Weil X kompakt ist, besitzt für $j \in \{1, \dots, n\}$ die Folge $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ jeweils eine in X konvergente Teilfolge; indem wir zu einer geeigneten Teilfolge von (y_k) übergehen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit erreichen, dass für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ die gesamte Folge $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ein $x_j \in X$ konvergiert. Die Punkte x_j brauchen natürlich nicht verschieden zu sein, aber wegen der Steigkeit von f gilt $f(x_j) = y$, und weil $f(x_{k,j}) = y_k$ ist, folgt selbst falls die x_j nicht paarweise verschieden sind, $\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) \geq n$. Also ist $y \in S_n$. \square

3.75 Satz. (Satz von Riemann-Hurwitz.) Seien X, Y zwei kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht g_X bzw. g_Y , und $f : X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung vom Grad m_f und totaler Verzweigungsordnung b_f . Dann gilt die *Formel von Riemann-Hurwitz*

$$g_X = \frac{b_f}{2} + m_f(g_Y - 1) + 1.$$

Aus der Formel von Riemann-Hurwitz ergibt sich, dass die totale Verzweigungszahl b_f stets geradzahlig ist.

Wir werden im nächsten Abschnitt (über hyperelliptische Riemannsche Flächen) eine Anwendung des Satzes von Riemann-Hurwitz kennenlernen.

Beweis. Sei $\omega \neq 0$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1, 0)$ auf Y , dann ist $f^*\omega \neq 0$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1, 0)$ auf X . Deshalb gilt $\deg((\omega)) = 2g_Y - 2$ und $\deg((f^*\omega)) = 2g_X - 2$ nach Aussage 3.62.

Sei nun $x \in X$ und $y = f(x)$. Nach Aussage 3.72 gibt es Karten (U, z) von X mit $z(x) = 0$ und (V, w) von Y mit $w(y) = 0$, so dass $w \circ f = z^k$ mit $k = b_f(x) + 1$ ist. Wir stellen ω lokal auf V als $\omega = \psi(w) dw$ dar. Dann gilt auf U

$$f^*\omega = \psi(z^k) dz^k = k z^{k-1} \psi(z^k) dz$$

und daher

$$\text{ord}_x(f^*\omega) = (k - 1) + k \text{ord}_y(\psi) = b_f(x) + (b_f(x) + 1) \text{ord}_y(\omega). \quad (\dagger)$$

Nun gilt für jedes $y \in Y$ nach Aussage 3.74

$$\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) = m_f$$

und daher ergibt sich durch Summation von (†)

$$\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} b_f(x) + m_f \text{ord}_y(\omega).$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} 2g_X - 2 = \deg((f^*\omega)) &= \sum_{x \in X} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{ord}_x(f^*\omega) \\ &= \sum_{y \in Y} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} b_f(x) + \sum_{y \in Y} m_f \text{ord}_y(\omega) = b_f + m_f \deg((\omega)) = b_f + m_f (2g_Y - 2). \end{aligned}$$

Durch Umformen nach g_X ergibt sich die Behauptung. \square

3.15 Hyperelliptische Riemannsche Flächen

Bisher verfügen wir noch über kein explizites Konstruktionsverfahren für kompakte Riemannschen Flächen von Geschlecht ≥ 2 . Die *hyperelliptischen* Riemannschen Flächen sind in gewisser Weise die einfachsten solchen Flächen. Sie können explizit konstruiert werden.

3.76 Definition. Eine kompakte Riemannsche Fläche X heißt *hyperelliptisch* [hyperelliptic], wenn es auf X eine nicht-konstante meromorphe Funktion f gibt, die genau zwei Polstellen (gezählt gemäß ihrer Vielfachheit) besitzt.[¶]

In dieser Situation hat jeder Verzweigungspunkt der Abbildung $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ die Verzweigungszahl 1, also ist f eine 2-blättrige, verzweigte Überlagerung (siehe Aussage 3.74). Aus dem Satz von Riemann-Hurwitz 3.75 folgt, dass das Geschlecht g der hyperelliptischen Riemannschen Fläche X durch

$$b = 2g + 2$$

gegeben wird, wobei b die Anzahl der Verzweigungspunkte von f ist.

3.77 Beispiel. (a) Sei $a = a(\lambda)$ ein normiertes Polynom vom Grad $2g + 2$, das nur einfache Nullstellen besitzt. Dann wird durch die Gleichung

$$\nu^2 = a(\lambda)$$

eine hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht g definiert. Genauer gesagt, ist damit das Folgende gemeint:

Wir betrachten die Menge

$$\Sigma^\circ = \{(\lambda, \nu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \nu^2 = a(\lambda)\}.$$

Wir betrachten Σ° als topologischen Teilraum von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$; auf diese Weise ist Σ° ein zusammenhängender Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie. Σ° ist eine Riemannsche

[¶]Manche Autoren schränken den Begriff „hyperelliptisch“ auf Flächen von Geschlecht ≥ 2 ein. In diesem Zusammenhang werden kompakte Riemannsche Flächen von Geschlecht 1, also komplexe Tori, als *elliptische* Flächen bezeichnet. Sie sind stets hyperelliptisch im Sinne unserer Definition, siehe Aussage 3.78.

Fläche: Wir beschreiben dafür Kartenfunktionen in der Nähe von Punkten $(\lambda_0, \nu_0) \in \Sigma^\circ$: Ist $a(\lambda_0) \neq 0$, so ist $\Sigma^\circ \rightarrow \mathbb{C}, (\lambda, \nu) \mapsto \lambda$ in der Nähe von (λ_0, ν_0) eine Kartenfunktion. Ist $a(\lambda_0) = 0$, so ist $\nu_0 = 0$ und Σ° ist in der Nähe des Punktes (λ_0, ν_0) biholomorph äquivalent zu $\{\nu^2 = \lambda - \lambda_0\}$. Deshalb ist dann $\Sigma^\circ \rightarrow \mathbb{C}, (\lambda, \nu) \mapsto \nu$ in der Nähe von (λ_0, ν_0) eine Kartenfunktion.

Allerdings ist Σ° nicht kompakt. Wir „kompaktifizieren“ Σ° zu einer kompakten Riemannschen Fläche Σ , indem wir zwei neue Punkte ∞_\pm hinzufügen. Dabei soll $\lambda(\infty_\pm) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ sein, und die Struktur von X bei diesen Punkten soll dadurch beschrieben sein, dass die Funktion $\lambda: \Sigma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ bei ∞_\pm lokal biholomorph ist, das heißt, dass $1/\lambda$ eine holomorphe Karte ist. Dann ist $\lambda: \Sigma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine nicht-konstante meromorphe Funktion, die genau in den beiden Punkten ∞_\pm einen Pol jeweils erster Ordnung besitzt. Also ist Σ eine hyperelliptische Riemannsche Fläche. Die Verzweigungspunkte von λ sind genau die $(2g+2)$ -vielen Nullstellen des Polynoms a , deshalb hat Σ das Geschlecht g .

- (b) Sei nun $a = a(\lambda)$ ein normiertes Polynom vom Grad $2g+1$, das nur einfache Nullstellen besitzt. Dann wird durch die Gleichung

$$\nu^2 = a(\lambda)$$

ebenfalls eine hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht g definiert. Im Unterschied zu (a) ist hier allerdings $\lambda = \infty$ ein Verzweigungspunkt von λ .

Wie in (a) kann man die nicht-kompakte Riemannsche Fläche

$$\Sigma^\circ = \{(\lambda, \nu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \nu^2 = a(\lambda)\}$$

betrachten. Weil die Zahl $2g+1$ ihrer Verzweigungspunkte aber nun ungerade ist, kann man eine kompakte Riemannsche Fläche nur erhalten, indem man bei der Kompaktifizierung einen Verzweigungspunkt bei $\lambda = \infty$ hinzufügt. Wir definieren also Σ dadurch, das wir zu Σ° einen einzigen Punkt ∞ mit $\lambda(\infty) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ hinzufügen. Die Struktur von Σ soll in der Nähe von ∞ dadurch charakterisiert sein, dass ∞ ein (einfacher) Verzweigungspunkt der meromorphen Funktion λ ist, das soll heißen, dass $\sqrt{1/\lambda}$ in der Nähe von $\infty \in \Sigma$ eine holomorphe Karte von Σ ist. Auf diese Weise wird λ zu einer nicht-konstanten, meromorphen Funktion, die in $\infty \in \Sigma$ einen Pol zweiter Ordnung besitzt, und ansonsten holomorph ist. Somit ist Σ eine hyperelliptische Riemannsche Fläche. Die Verzweigungspunkte von λ sind genau die $(2g+1)$ -vielen Nullstellen des Polynoms a , zuzüglich des Punktes $\infty \in \Sigma$, deshalb hat Σ auch in diesem Fall das Geschlecht g .

3.78 Aussage. Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \leq 2$ ist hyperelliptisch.

Beweis. Wir werden zeigen, dass es einen Divisor $D = x_1 + x_2 \in \text{Div}(X)$ (dabei $x_1, x_2 \in X$) mit $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$ gibt. Daraus folgt, dass es eine nicht-konstante Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ gibt. Sie hat einfache Pole in den beiden Punkten $x_1, x_2 \in \text{supp}(D)$, deshalb ist X dann hyperelliptisch.

Für $g \in \{0, 1\}$ können dabei die Punkte x_1, x_2 beliebig gewählt werden. Nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56) gilt dann nämlich

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 3 - g + i(D) \geq 3 - g \geq 2.$$

Betrachten wir nun den Fall $g = 2$. Wir wählen ein holomorphe 1-Form $\omega \neq 0$ auf X . Nach Aussage 3.62 hat der kanonische Divisor $D = (\omega)$ den Grad $2g - 2 = 2$ und es gilt $D \geq 0$, also ist $D = x_1 + x_2$. Dabei ist $i(D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \Omega) = 1$, und somit gilt wieder nach dem Satz von Riemann-Roch

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 3 - g + i(D) = 2.$$

□

3.79 Aussage. Sei X eine hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht g , und f eine nicht-konstante, meromorphe Funktion auf X mit genau zwei Polstellen. Es seien $x_1, \dots, x_{2g+2} \in X$ die Verzweigungspunkte von f , und y_1, y_2 die Polstellen von f . Wir setzen voraus, dass $x_j \neq y_k$ für alle $j = 1, \dots, 2g+2$ und $k = 1, 2$ gilt. Dann existiert eine weitere meromorphe Funktion w auf X mit

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (f - f(x_j)). \quad (*)$$

Der Divisor von w ist

$$(w) = x_1 + \dots + x_{2g+2} - (g+1)(y_1 + y_2).$$

3.80 Beispiel. In den Beispielen 3.77(a),(b) setzt sich die Funktion $\lambda : \Sigma^\circ \rightarrow \mathbb{C}$, $(\lambda, \nu) \mapsto \lambda$ jeweils zu einer nicht-konstanten meromorphen Funktion auf Σ mit genau zwei Polstellen (gezählt gemäß Vielfachheit) fort. Die hierzu gehörende Funktion w gemäß Aussage 3.79 wird auf Σ° durch $\nu : \Sigma^\circ \rightarrow \mathbb{C}$, $(\lambda, \nu) \mapsto \nu$ gegeben. (Im Fall von Beispiel 3.77(b) wurde dabei von der Voraussetzung in Aussage 3.79 abgesehen, dass die Polstellen von λ keine Verzweigungspunkte sein sollen. Deshalb hat ν in diesem Fall in dem einzigen Punkt $\infty \in \Sigma$ einen Pol der Ordnung $2g+2$, nicht $g+1$.)

Beweis von Aussage 3.79. Zumindest gibt es um jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung, auf der es eine meromorphe Funktion w gibt, die die Bedingung (*) erfüllt. Ist nämlich x weder Verzweigungspunkt noch Polstelle von f , so ist die rechte Seite von (*) auf einer einfach zusammenhängenden Umgebung U von x nullstellenfrei, daher existiert dort eine nullstellenfreie meromorphe Funktion $w = \sqrt{\prod_{j=1}^{2g+2} (f - f(x_j))}$, die (*) erfüllt. Ist hingegen x ein Verzweigungspunkt von f , so hat die rechte Seite von (*) dort eine Nullstelle genau zweiter Ordnung. Deshalb existiert auf einer einfach zusammenhängenden Umgebung U wieder eine meromorphe Funktion w , die (*) erfüllt; sie hat in x eine Nullstelle erster Ordnung. Ist schließlich x eine Polstelle von f , so hat die rechte Seite von (*) in x einen Pol der Ordnung $2g+2$. Daher existiert ebenfalls um x eine meromorphe Funktion w , die (*) erfüllt, und zwar hat w in x einen Pol der Ordnung $g+1$. In allen diesen Fällen ist eine solche lokale Funktion w bis auf ihr Vorzeichen eindeutig bestimmt.

Demnach verbleibt nur zu zeigen, dass es eine *globale* meromorphe Funktion w auf X gibt, die die Gleichung (*) erfüllt. Dafür konstruieren wir ein konkretes Modell für X . Wir setzen $e_j = f(x_j) \in \mathbb{C}$. Dann sind die e_j paarweise verschieden, es gilt $f^{-1}[\{e_j\}] = \{x_j\}$, wohingegen für $e \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}$ die Menge $f^{-1}[\{e\}]$ aus genau zwei Elementen von X besteht. Wir betrachten nun zwei Kopien der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$, die wir als Kopie I und Kopie II bezeichnen. Für jedes $k \in \{1, \dots, g+1\}$, wählen wir eine glatte Kurve in $\widehat{\mathbb{C}}$, die von e_{2k-1} nach e_{2k} verläuft, und wir als „Schlitz“ in beiden Kopien von $\widehat{\mathbb{C}}$ betrachten. Wir dürfen

annehmen, dass die x_j so nummeriert, und die „Schlitze“ so gewählt sind, dass sich keine zwei von ihnen schneiden. Von den beiden „Ufern“ eines jeden Schlitzes bezeichnen wir willkürlich das eine als „N-Ufer“, das andere als „S-Ufer“. Wir konstruieren einen topologischen Raum \tilde{X} , indem wir entlang jedem der $(g+1)$ Schlitzes das N-Ufer von Kopie I von $\hat{\mathbb{C}}$ mit dem S-Ufer von Kopie II, sowie das S-Ufer von Kopie II mit dem N-Ufer von Kopie I verkleben. Auf diese Weise wird \tilde{X} eine kompakte Riemannsche Fläche. Die Funktion $f: \tilde{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, die jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ das entsprechende Element von $\hat{\mathbb{C}}$ zuordnet, ist offensichtlich eine nicht-konstante, meromorphe Funktion auf X mit genau zwei Polstellen, und Verzweigungspunkten genau in den e_j . Deshalb ist (\tilde{X}, \tilde{f}) biholomorph äquivalent zu (X, f) . In diesem Sinne ist (\tilde{X}, \tilde{f}) ein konkretes Modell für (X, f) .

Wir haben nun zu zeigen, dass eine lokal definierte Funktion w entlang jeder Kurve in X analytisch fortgesetzt werden kann. Um zu verstehen, dass dies der Fall ist, betrachten wir zunächst auf $\hat{\mathbb{C}}$ die analytische Fortsetzung eines Zweiges der Funktion $\sqrt{f - e_j}$. Sie wechselt entlang eines geschlossenen Weges in $\hat{\mathbb{C}}$ genau dann das Vorzeichen, wenn der Weg um e_j ungerade Windungszahl hat. Deshalb wechselt die analytische Fortsetzung von w entlang eines geschlossenen Weges in $\hat{\mathbb{C}}$ genau dann das Vorzeichen, wenn die Summe der Windungszahlen um alle e_j ungerade ist. Ist dies der Fall, so muss der Weg ungeradzahlig häufig einen „Schlitz“ der Konstruktion von \tilde{X} schneiden. Das bedeutet aber, dass der Lift des gegebenen Weges nach \tilde{X} nicht mehr geschlossen ist, sondern von Kopie I von $\hat{\mathbb{C}}$ nach Kopie II oder umgekehrt verläuft. Er verbindet also zwei verschiedene Punkte von \tilde{X} mit demselben Bild unter f . Daraus ergibt sich, dass w auf \tilde{X} global definiert werden kann. \square

Wir wissen, dass für jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht g der Raum $H^0(X, \Omega)$ der holomorphen 1-Formen auf X vom Typ $(1, 0)$ ein g -dimensionaler Vektorraum ist. Das folgende Korollar zeigt, dass wenn X hyperelliptisch ist, man eine Basis dieses Vektorraums explizit angeben kann:

3.81 Korollar. Sei X eine hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht g , f eine nicht-konstante, meromorphe Funktion auf X mit genau zwei Polstellen, und w die zugehörige Funktion gemäß Aussage 3.79. Dann ist $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ mit

$$\omega_j = \frac{f^{j-1}}{w} df \quad \text{für } j = 1, \dots, g$$

eine Basis von $H^0(X, \Omega)$.

Beweis. Offensichtlich sind die g -vielen ω_j linear unabhängige meromorphe 1-Formen vom Typ $(1, 0)$ auf X . Wir brauchen nur zu zeigen, dass sie holomorph, also in $H^0(X, \Omega)$ enthalten sind. Wegen $\dim H^0(X, \Omega) = g$ ergibt sich dann, dass die ω_j eine Basis von $H^0(X, \Omega)$ bilden.

Wir berechnen also den Divisor von ω_j . Es seien x_1, \dots, x_{2g+2} die Verzweigungspunkte von f , y_1, y_2 die Polstellen von f und y_3, y_4 die Nullstellen von f . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder annehmen, dass $x_1, \dots, x_{2g+2}, y_1, y_2, y_3, y_4$ paarweise verschieden sind. Dann ist

$$(f) = y_3 + y_4 - y_1 - y_2 \quad \text{und} \quad (df) = x_1 + \dots + x_{2g+2} - 2y_1 - 2y_2$$

sowie nach Aussage 3.79

$$(w) = x_1 + \dots + x_{2g+2} - (g+1)(y_1 + y_2).$$

Damit ergibt sich

$$(\omega_j) = \left(\frac{f^{j-1}}{w} df\right) = (j-1) \cdot (f) - (w) + (df) = (g-j)(y_1 + y_2) + (j-1)(y_3 + y_4) .$$

Für $j \in \{1, \dots, g\}$ ist sowohl $g-j \geq 0$ als auch $j-1 \geq 0$, und somit $(\omega_j) \geq 0$. Also ist ω_j holomorph. □

3.16 Linienbündel auf Riemannschen Flächen

Ein Linienbündel auf einer Riemannschen Fläche X ist eine „Zuordnung“, die jedem Punkt $x \in X$ eine „Linie“, d.h. einen komplex-1-dimensionalen Vektorraum E_x zuordnet. Wir wollen fordern, dass die Zuordnung $x \mapsto E_x$ in einem noch zu definierendem Sinne holomorph ist, und sprechen dann von einem holomorphen Linienbündel. Solche Linienbündel treten bei vielen Anwendungen der Theorie Riemannscher Flächen auf, u.a. auch in der Spektraltheorie integrierbarer Systeme.

3.82 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, E ein topologischer Raum, und $\pi : E \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Weiter sei für jedes $x \in X$ die Faser [fibre] $E_x = \pi^{-1}[\{x\}]$ mit der Struktur eines komplex-1-dimensionalen Vektorraums versehen. $\pi : E \rightarrow X$ oder einfach E heißt ein *Linienbündel über X* [line bundle over X], wenn es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und einen Homöomorphismus

$$h : E_U := \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathbb{C}$$

gibt, so dass gilt:

(a) h ist *fasertreu*, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{C} \\ \pi|_{E_U} \downarrow & \swarrow \text{pr}_U & \\ U & & \end{array}$$

kommutiert.

(b) Für $x \in U$ ist $\text{pr}_{\mathbb{C}} \circ h|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{C}$ jeweils ein Vektorraum-Isomorphismus.

Ein derartiges h heißt eine *lokale Trivialisierung* [local trivialization] des Linienbündels π . Eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X zusammen mit lokalen Trivialisierungen h_i auf U_i (für jedes $i \in I$) heißt ein *Atlas* [atlas] des Linienbündels π .

3.83 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\pi : E \rightarrow X$ ein Linienbündel über X , und $(U_i, h_i)_{i \in I}$ ein Atlas von π . Für $i, j \in I$ gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Funktion

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$$

so dass für $(x, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$ gilt:

$$h_j(x, g_{ij}(x)v) = h_i(x, v) .$$

Für $i, j, k \in I$ gilt auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ die Kozykel-Bedingung (bezüglich der multiplikativ geschriebenen, abelschen Gruppe \mathbb{C}^*)

$$g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}.$$

Die g_{ij} heißen *Übergangsfunktionen* [transition functions] zum Atlas (U_i, h_i) .

Beweis. Sei $x \in U_i \cap U_j$. Weil $h_i(x, \cdot)$ und $h_j(x, \cdot)$ invertierbare lineare Abbildungen $E_x \rightarrow \mathbb{C}$ sind, gibt es eine Zahl $g_{ij}(x) \in \mathbb{C}^*$ mit $h_i(x, \cdot) = g_{ij}(x) \cdot h_j(x, \cdot) = h_j(x, g_{ij}(x) \cdot \cdot)$. Die dadurch definierte Funktion $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ hängt offenbar stetig von $x \in U_i \cap U_j$ ab. Für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ und beliebiges $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$h_k(x, g_{ik}(x)v) = h_i(x, v) = h_j(x, g_{ij}(x)v) = h_k(x, g_{jk}(x)g_{ij}(x)v)$$

und somit $g_{ik} = g_{ij} g_{jk}$. □

3.84 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann heißt ein Linienbündel $\pi : E \rightarrow X$ über X *holomorph* [holomorphic], wenn es einen Atlas für π gibt, so dass die entsprechenden Übergangsfunktionen (Aussage 3.83) holomorph sind. Ein solcher Atlas heißt *holomorpher Atlas* für π .

Sei X eine Riemannsche Fläche und $\pi : E \rightarrow X$ ein holomorphes Linienbündel mit holomorphem Atlas $(U_i, h_i)_{i \in I}$ zur offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X . Seien weiter $(g_{ij})_{i, j \in I}$ die zugehörigen Übergangsfunktionen nach Aussage 3.83. Dann ist $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$. Dabei ist \mathcal{O}^* die Garbe der nullstellenfreien holomorphen Funktionen auf X . Als Gruppenoperation für diese Garbe von abelschen Gruppen verwenden wir dabei die punktweise Multiplikation(!) holomorpher Funktionen. Durch den Atlas wird daher ein Element der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ bestimmt. Man kann zeigen, dass dieses Element von $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ nicht von der Wahl des holomorphen Atlas abhängt, und dass zwei verschiedene holomorphe Linienbündel genau dann dasselbe Element von $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ induzieren, wenn sie zueinander isomorph (fasertreu biholomorph äquivalent) sind (Übungsaufgabe). Das zeigt: Die Menge der Isomorphieklassen von holomorphen Linienbündeln auf X entspricht der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Die Gruppe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ wird als *Picard-Varietät* [Picard variety] bezeichnet. Man kann zeigen (nicht hier, und nicht ganz leicht), dass sie isomorph zu $\text{Div}(X)/\text{Div}_P(X)$ ist, wobei $\text{Div}_P(X)$ die Menge der Hauptdivisoren auf X bezeichnet.

3.85 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche und $\pi : E \rightarrow X$ ein Linienbündel.

- (a) Ein *Schnitt* [section] von π ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow E$ mit $\pi \circ f = \text{id}_X$. Also gilt $f(x) \in E_x$ für jedes $x \in X$.
- (b) Sei nun π ein holomorphes Linienbündel und $(U_i, h_i)_{i \in I}$ ein holomorpher Atlas von π . Dann heißt ein Schnitt $f : X \rightarrow E$ von π *holomorph*, wenn für jedes $i \in I$ die Funktion $\text{pr}_{\mathbb{C}} \circ h_i \circ f|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

3.86 Beispiel. (Aus der Spektraltheorie integrierbarer Systeme.) Es sei X entweder \mathbb{C} oder \mathbb{C}^* und es sei eine matrixwertige, (komponentenweise) holomorphe Funktion

$$M = M(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix} : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

gegeben. Die Eigenwerte μ von $M(\lambda)$ werden durch die Gleichung

$$\mu^2 - \Delta(\lambda)\mu + 1 = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta(\lambda) = \text{tr}(M(\lambda)) = \alpha(\lambda) + \delta(\lambda)$$

bestimmt; deshalb gilt für $\nu = \mu - \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$ die Gleichung $\nu^2 = \frac{1}{4}\Delta(\lambda)^2 - 1 =: a(\lambda)$. Die um $-\frac{1}{2}\Delta(\lambda)$ verschobenen Eigenwerte ν von $M(\lambda)$ entsprechen also den Punkten der komplexen Kurve

$$\Sigma^\circ = \{(\lambda, \nu) \in X \times \mathbb{C}^* \mid \nu^2 = a(\lambda)\}.$$

Wir wollen nun voraussetzen, dass $a(\lambda)$ ein Polynom in λ ist, das nur einfache Nullstellen besitzt. Dann sind wir für $X = \mathbb{C}$ in der Situation von Beispiel 3.77 (a) bzw. (b). Dort wurde gezeigt, dass man durch Hinzufügung von zwei bzw. einem Punkt zu Σ° über $\lambda = \infty$ eine kompakte Riemannsche Fläche Σ erhält, und dass diese hyperelliptisch ist. Im Fall $X = \mathbb{C}^*$ kann man Σ° analog kompaktifizieren, indem man außerdem Punkt(e) über $\lambda = 0$ hinzufügt. Auch hier erhält man eine hyperelliptische Fläche Σ . Sie heißt die *multiplier curve* oder *Spektralkurve*^{||} zu $M(\lambda)$. Ein Punkt von Σ ist also genau dann ein Verzweigungspunkt der Funktion $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $(\lambda, \nu) \mapsto \lambda$, wenn für diesen Wert $M(\lambda)$ nur einen Eigenwert (der arithmetischen Vielfachheit 2) hat.

Ein Vektor $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ ist genau dann Eigenvektor von $M(\lambda)$ zum Eigenwert $\mu = \nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$, wenn

$$(\alpha(\lambda) - \mu)v_1 + \beta(\lambda)v_2 = 0 \quad \text{oder gleichwertig} \quad \gamma(\lambda)v_1 + (\delta(\lambda) - \mu)v_2 = 0$$

gilt. Wir setzen nun weiter voraus, dass $\mu - a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Das bedeutet insbesondere, dass an den Verzweigungspunkten von λ wir $\beta(\lambda) \neq 0$ haben, was bedeutet, dass $M(\lambda)$ an diesen Stellen ein nicht-triviales Jordankästchen ist, d.h. dass der einzige Eigenwert μ von $M(\lambda)$ dann die geometrische Vielfachheit 1 besitzt. Unter dieser Voraussetzung ist das „holomorphe Vektorfeld“ auf Σ

$$\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^2, (\lambda, \nu) \mapsto (\beta(\lambda), \nu + \frac{1}{2}(\delta(\lambda) - \alpha(\lambda)))$$

nullstellenfrei, es ordnet jedem $(\lambda, \nu) \in \Sigma$ einen Eigenvektor von $M(\lambda)$ zum Eigenwert $\mu = \nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$ zu. Das zeigt, dass durch

$$\pi : E \rightarrow \Sigma, ((\lambda, \nu), v) \mapsto (\lambda, \nu) \quad \text{mit} \quad E = \bigcup_{(\lambda, \nu) \in \Sigma} \{(\lambda, \nu)\} \times \ker(M(\lambda) - (\nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)))$$

ein holomorphes Linienbündel auf Σ gegeben wird, das *Eigenbündel* zu $M(\lambda)$.

Das Paar (Σ, π) nennt man auch *Spektraldaten* der durch $M(\lambda)$ beschriebenen Lösung eines integrablen Systems.

^{||}Dass die Begriffe „multiplier curve“ und „Spektralkurve“ in dieser Situation gleichwertig sind, liegt an unserer Voraussetzung, dass $a(\lambda)$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen sein soll. Im allgemeinen Fall, wo Σ° Singularitäten besitzen kann, unterscheiden sich diese beiden Begriffe voneinander.