Deshalb sind alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional, und ihre Dimensionen sind wie folgt verknüpft:

$$\begin{aligned}\dim H^0(X,\mathscr{O}_{D'}) &= \dim H^0(X,\mathscr{O}_D) + \dim V \\ \dim H^1(X,\mathscr{O}_D) &= \dim W + \dim H^1(X,\mathscr{O}_{D'})\ .\end{aligned}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen und Anwendung von $\dim(V) + \dim(W) = 1 = \deg(D') - \deg(D)$ ergibt sich

$$H^0(X,\mathscr{O}_{D'}) + H^1(X,\mathscr{O}_D) = \dim H^0(X,\mathscr{O}_D) + \dim H^1(X,\mathscr{O}_{D'}) + \deg(D') - \deg(D)\ ,$$

also

$$H^0(X,\mathscr{O}_{D'}) - \dim H^1(X,\mathscr{O}_{D'}) - \deg(D') = H^0(X,\mathscr{O}_D) - \dim H^1(X,\mathscr{O}_D) - \deg(D)\ .$$

Daraus folgt, dass der Satz von Riemann-Roch genau dann für D' gilt, wenn er für D gilt. □

3.13 Die Serre-Dualität

Im ganzen Abschnitt sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $g = \dim H^1(X,\mathscr{O})$ ihr Geschlecht.

Eine Betrachtungsweise für die Serre-Dualität ist, dass durch sie für $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein Vektorraum-Isomorphismus $\iota_D : H^0(X,\Omega_{-D}) \to H^1(X,\mathscr{O}_D)^*$ konstruiert wird. Das bedeutet insbesondere, dass der Spezialitätsindex $i(D) = \dim H^1(X,\mathscr{O}_D)$, der im Satz von Riemann-Roch eine wesentliche Rolle spielt, gleich der Dimension von $H^0(X,\Omega_{-D})$, des Raums der meromorphen Differentialformen ω von Typ $(1,0)$ auf X mit $(\omega) \geq D$, ist.

Vorweg merken wir an, dass nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56) die Vektorräume $H^0(X,\mathscr{O}_D)$ und $H^1(X,\mathscr{O}_D)$ für jeden Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ endlich-dimensional sind. Am Ende von Abschnitt 3.11 hatten wir angemerkt, dass die Garbe Ω_D zu $\mathscr{O}_{D+K}$ isomorph ist, wobei K ein kanonischer Divisor auf X ist, d.h. $K = (\omega)$ für eine nicht-verschwindende, holomorphe 1-Form auf X. Aus diesem Grund sind auch die Vektorräume $H^0(X,\Omega_D)$ und $H^1(X,\Omega_D)$ endlich-dimensional. Auf der anderen Seite gilt die folgende Aussage:

3.60 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann existiert eine Konstante $k_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für jeden Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ gilt: $\dim H^0(X,\Omega_D) \geq \deg(D) + k_0$.

Beweis. Sei K ein kanonischer Divisor auf X, d.h. es existiert eine meromorphe 1-Form $\omega \neq 0$ vom Typ (1,0) mit $(\omega) = K$. Wir setzen $k_0 = 1 - g + \deg(K)$.[§] Weil die Garbe Ω_D zu $\mathscr{O}_{D+K}$ isomorph ist, gilt nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56)

$$\begin{aligned}\dim H^0(X,\Omega_D) = \dim H^0(X,\mathscr{O}_{D+K}) &= i(D+K) + 1 - g + \deg(D+K) \\ &\geq 1 - g + \deg(D) + \deg(K) = \deg(D) + k_0\ .\end{aligned}$$

□

[§]Wir werden gleich sehen (Aussage 3.62), dass aus der Serre-Dualität folgt, dass $\deg(K) = 2g-2$ und somit $k_0 = g - 1$ ist.

In Aussage und Definition 1.24 hatten wir das Residuum für meromorphe 1-Formen vom Typ $(1,0)$ auf X definiert. Wir führen nun ein (Gesamt-)Residuum für Kohomologieklassen in $H^1(X,\Omega)$ ein: Nach dem Theorem von Dolbeault, Theorem 3.51(b), ist $H^1(X,\Omega) \cong \mathscr{E}^{(2)}(X)/\mathrm{d}\mathscr{E}^{1,0}(X)$. Ein gegebenes $\xi \in H^1(X,\Omega)$ wird also bezüglich dieses Isomorphismus durch ein $\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(X)$ repräsentiert. Wir definieren das *Residuum* von ξ als

$$\mathrm{Res}(\xi) := \frac{1}{2\pi i}\int_X \omega \; . \tag{$\star$}$$

Dieses Flächenintegral ist endlich, weil X als kompakt vorausgesetzt ist. Wegen des Satz von Stokes Satz 1.20 für die unberandete Fläche X ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ω für ξ. Auf diese Weise erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Res} : H^1(X,\Omega) \to \mathbb{C} \; .$$

Sie ist offensichtlich nicht identisch Null, und daher surjektiv.

Sei nun $D \in \mathrm{Div}(X)$. Wir definieren eine bilineare Abbildung $H^0(X,\Omega_{-D}) \times H^1(X,\mathscr{O}_D)^*$ sowie — damit zusammenhängend — die oben erwähnte lineare Abbildung $\iota_D : H^0(X,\Omega_{-D}) \to H^1(X,\mathscr{O}_D)^*$: Durch das Produkt

$$\Omega_{-D} \times \mathscr{O}_D \to \Omega \; , \quad (\omega, f) \mapsto \omega f$$

wird eine bilineare Abbildung

$$H^0(X,\Omega_{-D}) \times H^1(X,\mathscr{O}_D) \to H^1(X,\Omega) \; , \quad (\omega,\xi) \mapsto \omega\xi$$

induziert. Durch Verkettung dieser bilinearen Abbildung mit $\mathrm{Res} : H^1(X,\Omega) \to \mathbb{C}$ erhalten wir eine Bilinearform

$$\langle \cdot\, , \cdot \rangle : H^0(X,\Omega_{-D}) \times H^1(X,\mathscr{O}_D) \to \mathbb{C} \; , \quad (\omega,\xi) \mapsto \langle \omega, \xi\rangle := \mathrm{Res}(\omega\xi) \; .$$

Wir definieren nun die lineare Abbildung

$$\iota_D : H^0(X,\Omega_{-D}) \to H^1(X,\mathscr{O}_D)^*, \; \omega \mapsto \langle \omega, \cdot \rangle \; .$$

Inhalt des Serre'schen Dualitätstheorems ist es, dass die Bilinearform $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ (in beiden Argumenten) nicht-entartet ist; eine derartige nicht-entartete Bilinearform nennt man eine *Paarung* zwischen $H^0(X,\Omega_{-D})$ und $H^1(X,\mathscr{O}_D)$. Äquivalent zur Nicht-Entartung von $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ ist die Aussage, dass ι_D ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

3.61 Theorem. (Serre-Dualität.) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in \mathrm{Div}(X)$. Dann ist $\iota_D : H^0(X,\Omega_{-D}) \to H^1(X,\mathscr{O}_D)^*$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

Die Serre-Dualität hat vielerlei Konsequenzen.

Als erstes ergibt sich aus ihr die folgende Gleichheit von Dimensionen

$$i(D) = \dim H^1(X,\mathscr{O}_D) = \dim H^0(X,\Omega_{-D}) \; ,$$

weswegen der Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56) für D auch als

$$\dim H^0(X,\mathscr{O}_D) - \dim H^0(X,\Omega_{-D}) = 1 - g + \deg(D)$$

formuliert werden kann. In Worten: Die maximale Anzahl von linear unabhängigen meromorphen Funktionen, die Vielfache von $-D$ sind, minus der maximalen Anzahl von linear unabhängigen meormophen 1-Formen, die Vielfache von D sind, ist gleich $1-g+\deg(D)$. Im Spezialfall $D=0$ ergibt sich

$$g = \dim H^1(X,\mathscr{O}) = \dim H^0(X,\Omega)\ .$$

In Worten: Das Geschlecht g einer kompakten Riemannschen Fläche X ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger holomorpher 1-Formen vom Typ (1,0) auf X.

Die Rollen von meromorphen Funktionen und meromorphen 1-Formen können in der Serre-Dualität vertauscht werden. Ist K ein kanonischer Divisor von X, so ist $\mathscr{O}_{-D} \cong \Omega_{-(D+K)}$ und $\Omega_D \cong \mathscr{O}_{D+K}$. Daher folgt aus der Serre-Dualität (für den Divisor $D+K$) die Isomorphie

$$H^0(X,\mathscr{O}_{-D}) \ \cong\ H^1(X,\Omega_D)^*\ .$$

Speziell für $D=0$ ergibt sich $\dim H^1(X,\Omega) = \dim H^0(X,\mathscr{O}) = 1$. Daher ist die surjektive lineare Abbildung $\mathrm{Res}: H^1(X,\Omega)\to\mathbb{C}$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

3.62 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und K ein kanonischer Divisor auf X. Dann gilt $\deg(K) = 2g-2$.

Beweis. Nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56) gilt

$$\dim H^0(X,\mathscr{O}_K) - \dim H^1(X,\mathscr{O}_K) = 1-g+\deg(K)\ .$$

Hier ist $\mathscr{O}_K \cong \Omega$, und daher folgt

$$\dim H^0(X,\Omega) - \dim H^1(X,\Omega) = 1-g+\deg(K)\ .$$

Wir haben eben gezeigt: $\dim H^0(X,\Omega) = g$ und $\dim H^1(X,\Omega) = 1$. Deshalb folgt $\deg(K) = 2g-2$. □

3.63 Korollar. Jeder komplexe Torus $X = \mathbb{C}/\Gamma$ (wobei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein maximales Gitter in $\mathbb{C}$ ist, siehe Beispiel 1.28(c)) hat das Geschlecht 1.

Beweis. Wir betrachten die reguläre Überlagerung $\pi: \mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Gamma$. Wir bezeichnen mit z die globale Koordinate von $\mathbb{C}$, dann ist $\mathrm{d}z$ eine nullstellenfreie, holomorphe 1-Form auf $\mathbb{C}$. Ist $\gamma:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine Decktransformation von π, so existiert ein $\omega\in\Gamma$, so dass $\gamma(z) = z+\omega$ ist, und daher gilt $\gamma^*(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z$. Deshalb existiert eine (eindeutige, global definierte) holomorphe 1-Form ω auf $\mathbb{C}/\Gamma$ mit $\pi^*\omega = \mathrm{d}z$. Mit $\mathrm{d}z$ ist auch ω nullstellenfrei, und daher ist der zu ω gehörende kanonische Divisor $K = (\omega) = 0$, insbesondere $\deg(K) = 0$. Nach Aussage 3.62 folgt $0 = 2g-2$, also $g = 1$. □

3.64 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, und $D\in\mathrm{Div}(X)$ mit $\deg(D) > 2g-2$. Dann ist D nicht-speziell, d.h. es gilt $H^1(X,\mathscr{O}_D) = 0$.

Beweis. Sei K ein kanonischer Divisor auf X. Dann ist $\Omega_{-D}\cong\mathscr{O}_{K-D}$. Aus der Serre-Dualität (Theorem 3.61) und dieser Isomorphie ergibt sich:

$$H^1(X,\mathscr{O}_D)^* \ \cong\ H^0(X,\Omega_{-D}) \ \cong\ H^0(X,\mathscr{O}_{K-D})\ .$$

Ist $\deg(D) > 2g-2$, so folgt $\deg(K-D) < 0$ wegen $\deg(K) = 2g-2$ nach Aussage 3.62, und daher ist $H^0(X,\mathscr{O}_{K-D}) = 0$ Somit ist auch $H^1(X,\mathscr{O}_D) = 0$. □

3.65 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, und $\mathscr{M}$ bzw. $\mathscr{M}^{(1)}$ die Garbe der meromorphen Funktionen bzw. der meromorphen 1-Formen vom Typ (1,0) auf X. Dann gilt

$$H^1(X,\mathscr{M}) = 0 \quad \text{und} \quad H^1(X,\mathscr{M}^{(1)}) = 0 .$$

Beweis. Sei eine Kohomologieklasse $\xi \in H^1(X,\mathscr{M})$ gegeben. Dann existiert eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von X und ein 1-Kozykel $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{M})$, der ξ repräsentiert. Indem man erforderlichenfalls $\mathfrak{U}$ verfeinert, und dann einen 1-Korand von (f_{ij}) abzieht, kann man dafür sorgen, dass es nur endlich viele Stellen $x \in X$ gibt, an denen irgendein f_{ij} einen Pol hat, und dass jede solche Stelle in nur endlich vielen der U_i enthalten ist. Dann existiert ein Divisor D, so dass $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}_D)$ ist. Dabei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\deg(D) > 2g-2$ annehmen. Dann gilt nach Aussage 3.64 $H^1(X,\mathscr{O}_D) = 0$, also auch $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}_D) = 0$. Somit ist $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}_D) \subset B^1(\mathfrak{U},\mathscr{M})$, d.h. ξ ist null-kohomolog bezüglich $\mathscr{M}$. Das zeigt $H^1(X,\mathscr{M}) = 0$.

Die Garbe $\mathscr{M}^{(1)}$ ist isomorph zu $\mathscr{M}$, denn ist $\omega \neq 0$ irgendeine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$ auf X, so wird durch $\mathscr{M} \to \mathscr{M}^{(1)},\ f \mapsto f\omega$ ein Garben-Isomorphismus gegeben. Deshalb folgt auch $H^1(X,\mathscr{M}^{(1)}) = 0$. □

3.66 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $D \in \mathrm{Div}(X)$. Die Garbe $\mathscr{O}_D$ heißt *global erzeugt* [globally generated], wenn es für jedes $x \in X$ ein $f \in H^0(X,\mathscr{O}_D)$ mit $\mathscr{O}_{D,x} = \mathscr{O}_x \cdot f$ gibt, d.h. wenn jeder Keim $\varphi \in \mathscr{O}_{D,x}$ als $\varphi = \psi \cdot f$ mit einem Keim $\psi \in \mathscr{O}_x$ geschrieben werden kann.

Die Bedingung $\mathscr{O}_{D,x} = \mathscr{O}_x \cdot f$ aus dieser Definition ist äquivalent zu $\mathrm{ord}_x(f) = -D(x)$.

3.67 Beispiel. Sei $X = \widehat{\mathbb{C}}$. Dann ist für jeden positiven Divisor auf X die Garbe $\mathscr{O}_D$ global erzeugt, denn zu $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $n \geq 0$ ist $f(z) = (z-z_0)^{-n}$ (für $z_0 \neq \infty$) bzw. $f(z) = z \mapsto z^n$ (für $z_0 = \infty$) eine meromorphe Funktion mit $\deg_{z_0}(f) = -n$, die in $z \neq z_0$ holomorph ist. Hingegen ist für $D = -z_0$ die Garbe $\mathscr{O}_D$ nicht global erzeugt, denn $H^0(X,\mathscr{O}_D)$ enthält nur die konstanten Funktionen.

3.68 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, und $D \in \mathrm{Div}(X)$ mit $\deg(D) \geq 2g$. Dann ist $\mathscr{O}_D$ global erzeugt.

Beweis. Wir fixieren $x_0 \in X$ und betrachten den Divisor $D' \in \mathrm{Div}(X)$ mit

$$D'(x) = \begin{cases} D(x) & \text{falls } x \neq x_0 \\ D(x) - 1 & \text{falls } x = x_0 \end{cases} \quad \text{für } x \in X .$$

Dann ist $\deg(D) > \deg(D') = \deg(D) - 1 \geq 2g-1 > 2g-2$, und daher gilt nach Aussage 3.64: $H^1(X,\mathscr{O}_D) = 0$ und $H^1(X,\mathscr{O}_{D'}) = 0$. Nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56) ergibt sich nun:

$$\dim H^0(X,\mathscr{O}_D) - \dim H^0(X,\mathscr{O}_{D'}) = \deg(D) - \deg(D') = 1 .$$

Somit existiert ein $f \in H^0(X,\mathscr{O}_D) \setminus H^0(X,\mathscr{O}_{D'})$, und dieses Element erfüllt die Bedingung $\mathrm{ord}_x(f) = -D(x)$. □

Es ist an der Zeit, uns mit dem Beweis des Theorems über die Serre-Dualität (Theorem 3.61) zu befassen. Wir geben hier den Beweis nicht vollständig wieder, stellen aber die Beweisstrategie und die wesentlichen Methoden dar. Ein vollständiger Beweis findet sich in [Fo, §17].

3.69 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\mathscr{M}^{(1)}$ die Garbe der meromorphen 1-Formen vom Typ (1,0) auf X, und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X

(a) Eine 0-Kokette $\mu = (\omega_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M}^{(1)})$ heißt eine *Mittag-Leffler-Verteilung*, wenn für alle $i, j \in I$ die Differenzen $\omega_j - \omega_i$ holomorph auf $U_i \cap U_j$ sind, d.h. wenn $\delta^0\mu \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$ gilt. Wir bezeichnen die Kohomologieklasse von $\delta^0\mu$ mit $[\delta^0\mu] \in H^1(X, \Omega)$.

(b) Sei $x_0 \in X$. Das *Residuum* [residue] einer Mittag-Leffler-Verteilung $\mu = (\omega_i)_{i\in I}$ ist definiert als $\operatorname{Res}_{x_0}(\mu) = \operatorname{Res}_{x_0}(\omega_i)$, wobei $i \in I$ so gewählt ist, dass $x_0 \in U_i$ ist. (Weil $\omega_i - \omega_j$ holomorph ist, ist diese Definition von der Wahl von i unabhängig.)

(c) Sei X nun kompakt. Dann definieren wir das *(Gesamt-)Residuum* von μ als

$$\operatorname{Res}(\mu) = \sum_{x\in X} \operatorname{Res}_x(\mu) \ .$$

(Weil X kompakt ist, sind nur endlich viele Summanden von Null verschieden.)

3.70 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, und $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M}^{(1)})$ eine Mittag-Leffler-Verteilung auf X. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(\mu) = \operatorname{Res}([\delta^0\mu]) \ .$$

Dabei ist $\operatorname{Res}(\mu)$ in Definition 3.69(c) und $\operatorname{Res}([\delta^0\mu])$ in Gleichung $(\star)$ definiert.

Beweis. Siehe [Fo, Theorem 17.3, S. 133f.]. □

3.71 Lemma. Die lineare Abbildung $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathscr{O}_D)^*$ aus Theorem 3.61 ist injektiv.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass es für jedes $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ ein $\xi \in H^1(X, \mathscr{O}_D)$ mit $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$ gibt. Dazu wählen wir einen Punkt $a \in X$ mit $D(a) = 0$ und eine holomorphe Karte (U_0, z) von X mit $a \in U_0$, $z(a) = 0$ und $D|_{U_0} = 0$. Außerdem können wir U_0 so klein wählen, dass ω auf $U_0 \setminus \{a\}$ keine Nullstellen besitzt, und wir schreiben $\omega = f\,\mathrm{d}z$ auf U_0. Weiter sei $U_1 = X \setminus \{a\}$ und $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$. Wir betrachten nun $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M})$ mit $f_0 = (zf)^{-1}$ und $f_1 = 0$. Dann ist

$$\omega\eta = \left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,,\, 0 \right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M}^{(1)})$$

eine Mittag-Leffler-Verteilung mit $\operatorname{Res}(\omega\eta) = 1$. Es gilt $\delta^0\eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_D)$, und es sei $\xi = [\delta^0\eta] \in H^1(X, \mathscr{O}_D)$ die dazu gehörende Kohomologieklasse. Wegen $\omega\xi = \omega \cdot [\delta^0\eta] = [\delta^0(\omega\eta)]$ ergibt sich nun mit Aussage 3.70:

$$\langle \omega, \xi \rangle = \operatorname{Res}(\omega\xi) = \operatorname{Res}([\delta(\omega\eta)]) = \operatorname{Res}(\omega\eta) = 1 \ .$$

□

Beweisskizze für die Serre-Dualität, Theorem 3.61. Wegen Lemma 3.71 ist nur noch zu zeigen, dass $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathscr{O}_D)^*$ surjektiv ist. Sei also $\lambda : H^1(X, \mathscr{O}_D) \to \mathbb{C}$ eine Linearform, ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\lambda \neq 0$ annehmen. Wir wollen zeigen, dass es eine 1-Differentialform $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ mit $\iota_D(\omega) = \lambda$ gibt.

Wir wählen einen Divisor $P \in \operatorname{Div}(X)$ mit $\deg(P) = 1$ sowie ein zunächst beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir $D_n = D - nP$ und betrachten den Vektorraum $\Lambda = \{\psi\,\lambda \mid \psi \in H^0(X, \mathscr{O}_{nP})\}$.

Damit ist Λ ein Unterraum von $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$. Man kann zeigen (siehe [Fo, Lemma 17.8]), dass die Abbildung $H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \to \Lambda, \psi \mapsto \psi\,\lambda$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Folglich gilt nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56):

$$\dim \Lambda = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \geq \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) - i(nP) = 1 - g + \deg(nP) = 1 - g + n\ ,$$

wobei g das Geschlecht von X ist. Nach Lemma 3.71 ist $\iota_{D_n} : H^0(X, \Omega_{-D_n}) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ injektiv, also gilt für das Bild $\mathrm{im}(\iota_{D_n}) \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ nach Aussage 3.60

$$\dim \mathrm{im}(\iota_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \geq -\deg(D_n) + k_0 = n + k_0 - \deg(D)\ .$$

und somit

$$\dim \Lambda + \dim \mathrm{im}(\iota_{D_n}) \geq 2n + (k_0 + 1 - g - \deg(D))\ . \qquad (☺)$$

Ist $n > \deg(D)$, so ist $\deg(D_n) < 0$ und deshalb $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$. In dieser Situation zeigt der Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56):

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg(D_n) = n + (g - 1 - \deg(D))\ .$$

Durch Vergleich mit (☺) ergibt sich: Wählt man $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so gilt

$$\dim \Lambda + \dim \mathrm{im}(\iota_{D_n}) > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*\ .$$

Da sowohl Λ als auch $\mathrm{im}(\iota_{D_n})$ Untervektorräume von $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ sind, folgt daraus, dass $\Lambda \cap \mathrm{im}(\iota_{D_n}) \neq 0$ ist. Also existiert $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, $\psi \neq 0$ und $\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$ mit $\iota_{D_n}(\omega_0) = \psi\lambda$. Dann ist $\omega = (1/\psi)\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D})$. Man kann nun zeigen, dass $\iota_D(\omega) = \lambda$ ist, siehe [Fo, Lemma 17.7]. □