holomorph in allen a_k mit $h_i(a_k) = \delta_{ik}$, und deshalb hat

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i\, h_i$$

die gewünschten Eigenschaften. $\square$

3.10 Die exakte Kohomologiesequenz

Um die Struktur von Kohomologiegruppen besser zu verstehen, wollen wir aus kurzen exakten Sequenzen von Garben (siehe Definition 3.14) exakte Sequenzen der zugehörigen Kohomologiegruppen konstruieren. Konkret: Sei X ein topologischer Raum, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H}$ drei Garben von abelschen Gruppen auf X und φ und ψ zwei Garbenhomomorphismen, so dass

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben ist. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass dann

$$0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \to H^0(X,\mathscr{G}) \to H^0(X,\mathscr{H}) \to H^1(X,\mathscr{F}) \to H^1(X,\mathscr{G}) \to H^1(X,\mathscr{H}) \qquad (\heartsuit)$$

eine „lange“ exakte Sequenz ist. Damit diese Aussage sinnvoll ist, werden wir insbesondere sagen müssen, welche Abbildungen mit den Pfeilen $\to$ in der Kohomologiesequenz gemeint sind.

Sei dazu $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein beliebiger Garbenhomomorphismus von Garben über X, etwa $\alpha = (\alpha_U)_{U\subset X}$ (siehe Definition 3.11). Dann werden durch α Gruppenhomomorphismen der Kohomologiegruppen

$$\alpha^0 : H^0(X,\mathscr{F}) \to H^0(X,\mathscr{G}) \quad \text{und} \quad \alpha^1 : H^1(X,\mathscr{F}) \to H^1(X,\mathscr{G})$$

definiert. Dabei ist α^0 einfach die Abbildung $\alpha_X : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ (man erinnere sich an die Definitionen am Schluss von Abschnitt 3.4: $H^0(X,\mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$ und $H^0(X,\mathscr{G}) = \mathscr{G}(X)$). Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\alpha_{\mathfrak{U}} : C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}), \quad \xi = (f_{ij})_{i,j\in I} \longmapsto \alpha_{\mathfrak{U}}(\xi) = (\alpha_{U_i\cap U_j}(f_{ij}))_{i,j\in I}\ .$$

Diese Abbildung bildet Kozykel auf Kozykel und Koränder auf Koränder ab, und induziert deshalb einen Homomorphismus

$$\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U},\mathscr{G})\ .$$

Wenn wir nun alle möglichen offenen Überdeckungen $\mathfrak{U}$ von X betrachten, so respektieren die zugehörigen Homomorphismen $\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}$ die Äquivalenzrelation $\sim$ aus der Konstruktion von $H^1(X,\mathscr{F})$ in Abschnitt 3.4. Deshalb wird durch die Homomorphismen $\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}$ ein Homomorphismus

$$\alpha^1 : H^1(X,\mathscr{F}) \to H^1(X,\mathscr{G})$$

induziert.

3.47 Aufgabe. Let $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ be a sheaf-surjective homomorphism of sheaves. In this question we will define a homomorphism $\delta^\psi : H^0(X,\mathscr{H}) \to H^1(X,\ker(\psi))$ called the *connecting homomorphism* [verbindender Homomorphismus] for ψ.

(a) For any $g \in H^0(X, \mathscr{H}) = \mathscr{H}(X)$, show the following:

(i) Argue why for every point $p \in X$ there exists an open neighbourhood U_p and a section $f_p \in \mathscr{G}(U_p)$ such that $\psi(f_p) = g|_{U_p}$.

(ii) The sections (f_p) define a 0-cochain f with respect to the cover $\{U_p\}$. Define $h = \delta^0(f)$. Show that $\psi(h) = 0$.

(iii) Explain why h is a cocycle of the sheaf $\ker(\psi)$ but is not necessarily a coboundary of it.

(iv) We say that $\delta^\psi(g)$ is the class in $H^1(X, \ker(\psi))$ given by h. Show that this does not depend on the choice of neighbourhoods U_p or sections f_p.

(b) Show that δ^ψ is a homomorphism.

Wir betrachten die exakte Sequenz von Garben

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0 ,$$

wobei $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ Garben auf X und φ, ψ Homomorphismen von Garben sind. Die Exaktheit der Sequenz bei $\mathscr{H}$ bedeutet, dass ψ garben-surjektiv ist. Wir betrachten den verbindenden Homomorphismus

$$\delta^\psi : H^0(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \ker(\psi))$$

gemäß Aufgabe 3.47. Weil die Garbensequenz bei $\mathscr{G}$ exakt ist, ist $\ker(\psi)$ gleich dem Garbenbild $\operatorname{im}(\varphi)$. Für $h \in H^0(X, \mathscr{H})$ ist daher $\delta^\psi(h) \in H^1(X, \operatorname{im}(\varphi))$, und deshalb existiert ein $\delta^*(h) \in H^1(X, \mathscr{F})$ mit $\varphi^1(\delta^*(h)) = \delta^\psi(h)$. Dadurch wird ein Homomorphismus

$$\delta^* : H^0(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{F})$$

definiert, den wir den *verbindenden Homomorphismus* [connecting homomorphism] der exakten Sequenz von Garben nennen.

Wir können nun die Hauptaussage dieses Abschnitts formulieren, und dabei die Pfeile in der Kohomologiesequenz (♡) „beschriften“:

3.48 Theorem. Sei X ein topologischer Raum, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H}$ drei Garben von abelschen Gruppen auf X und $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ und $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ zwei Garbenhomomorphismen, so dass

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0 \tag{$*G$}$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben ist. Dann ist die folgenden „lange“ Sequenz von Homomorphismen von Kohomologiegruppen exakt:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^1} H^1(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^1} H^1(X, \mathscr{H}) . \tag{$*H$}$$

Beweis. Weil die Sequenz $(*G)$ exakt ist, ist nach Aufgabe 3.17(a) die Sequenz

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X, \mathscr{H})$$

exakt. Somit ist die Sequenz $(*H)$ exakt bei $H^0(X, \mathscr{F})$ und bei $H^0(X, \mathscr{G})$.

Zur Exaktheit von $(*H)$ bei $H^0(X,\mathscr{H})$: Zu zeigen ist $\operatorname{im}(\psi^0) = \ker(\delta^*)$. Sei $g \in H^0(X,\mathscr{G})$ gegeben und $h := \psi^0(g)$. Dann ist $\delta^\psi(h) = 0$ und daher auch $\delta^*(h) = 0$. Also ist $h \in \ker(\delta^*)$. — Sei umgekehrt $h \in \ker(\delta^*)$ gegeben. Nach Aufgabe 3.47 existiert eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von X, und ein $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{G})$, so dass $\delta^\psi(h)$ durch $\delta^0((g_i)) \in Z^1(\mathfrak{U},\ker(\psi))$, repräsentiert wird. Dann wird $\delta^*(h)$ durch $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ mit $\varphi^1((f_{ij})) = \delta^0((g_i))$ repräsentiert. Wegen $\delta^*(h) = 0$ ist $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, also existiert ein $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ mit $\delta^0((f_i)) = (f_{ij})$. Sei $\tilde{g}_i = g_i - \varphi(f_i)$. Dann gilt jeweils

$$\tilde{g}_i - \tilde{g}_j = (g_i - \varphi(f_i)) - (g_j - \varphi(f_j)) = (g_i - g_j) - \varphi(f_{ij}) = (g_i - g_j) - (g_i - g_j) = 0 \quad \text{auf } U_i \cap U_j\,.$$

Nach dem Garbenaxiom (LG) existiert also ein $g \in H^0(X,\mathscr{G})$ mit $g|_{U_i} = \tilde{g}_i$ für alle $i \in I$. Für dieses gilt wegen $\operatorname{im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$

$$\psi(\tilde{g}_i) = \psi(g_i - \varphi(f_i)) = \psi(g_i) = h \quad \text{auf } U_i\,,$$

und somit $h \in \operatorname{im}(\psi^0)$.

Zur Exaktheit von $(*H)$ bei $H^1(X,\mathscr{F})$: Zu zeigen ist $\operatorname{im}(\delta^*) = \ker(\varphi^1)$. Dabei ergibt sich $\operatorname{im}(\delta^*) \subset \ker(\varphi^1)$ unmittelbar aus der Konstruktion des verbindenden Homomorphismus δ^*. Sei umgekehrt $\xi \in \ker(\varphi^1)$ gegeben, und repräsentiert durch $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Wegen $\varphi^1(\xi) = 0 \in H^1(X,\mathscr{G})$ existiert dabei ein $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ mit $(\varphi(f_{ij})) = \delta^0((g_i))$. Nun gilt wegen $\operatorname{im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$

$$\psi(g_j) - \psi(g_i) = \psi(g_j - g_i) = \psi(\varphi(f_{ij})) = 0 \quad \text{auf } U_i \cap U_j\,.$$

Somit existiert nach dem Garbenaxiom (LG) ein $h \in H^0(X,\mathscr{H})$ mit $h|_{U_i} = \psi(g_i)$ für alle i. Aus der Konstruktion von δ^* folgt nun $\delta^*(h) = \xi$ und somit $\xi \in \operatorname{im}(\delta^*)$.

Zur Exaktheit von $(*H)$ bei $H^1(X,\mathscr{G})$: Zu zeigen ist $\operatorname{im}(\varphi^1) = \ker(\psi^1)$. Weil nach Aufgabe 3.17(a) die Sequenz

$$0 \to \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}(U_i \cap U_j)$$

für alle $i,j \in I$ exakt ist, gilt jedenfalls $\operatorname{im}(\varphi^1) \subset \ker(\psi^1)$. — Sei umgekehrt $\eta \in \ker(\psi^1) \subset H^1(X,\mathscr{G})$ gegeben, und durch $(g_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{G})$ bezüglich einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ repräsentiert. Wegen $\psi^1(\eta) = 0 \in H^1(X,\mathscr{H})$ existiert ein $(h_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{H})$ mit $\psi(g_{ij}) = h_j - h_i$. Weil ψ wegen der Exaktheit der Sequenz $(*G)$ garben-surjektiv ist, existiert zu jedem $x \in X$ ein $\tau(x) \in I$, eine Umgebung V_x von x, die in $U_{\tau(x)}$ enthalten ist, und ein Element $g_x \in \mathscr{G}(V_x)$ mit $\psi(g_x) = h_{\tau(x)}|_{V_x}$. Dann ist $\mathfrak{V} := (V_x)_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X, und zwar eine Verfeinerung der Überdeckung $\mathfrak{U}$. Sei weiter $\tilde{g}_{xy} = g_{\tau(x),\tau(y)}|_{V_x\cap V_y}$, dann ist $(\tilde{g}_{xy})_{x,y\in X} \in Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{G})$ ein weiterer Repräsentant der Kohomologieklasse η. Sei weiter $\widehat{g}_{xy} = \tilde{g}_{xy} + g_x - g_y$. Dann ist $((\widehat{g}_{xy}))_{x,y\in X} \in Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{G})$ noch ein Repräsentant von η, und es gilt

$$\psi(\widehat{g}_{xy}) = \psi(\tilde{g}_{xy}) + \psi(g_x - g_y) = \psi(g_{\tau(x),\tau(y)}) + (h_{\tau(x)} - h_{\tau(y)}) = (h_{\tau(y)} - h_{\tau(x)}) + (h_{\tau(x)} - h_{\tau(y)}) = 0\,.$$

Damit ist $\widehat{g}_{xy} \in \ker(\psi) = \operatorname{im}(\varphi)$, also existiert $f_{xy} \in \mathscr{F}(V_x \cap V_y)$ mit $\varphi(f_{xy}) = \widehat{g}_{xy}$. Die Kohomologieklasse $\xi \in H^1(X,\mathscr{F})$ zu $(f_{xy})_{x,y\in X} \in Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ erfüllt $\varphi^1(\xi) = \eta$, und somit ist $\eta \in \operatorname{im}(\varphi^1)$. □

3.49 Korollar. In der Situation von Theorem 3.48 gelte $H^1(X,\mathscr{G}) = 0$. Dann ist

$$H^1(X,\mathscr{F}) \cong \mathscr{H}(X) \,/\, \psi^0[\mathscr{G}(X)]\,.$$

Beweis. Wegen $H^1(X,\mathscr{G})=0$ ist nach Theorem 3.48 die Sequenz

$$\mathscr{G}(X) \xrightarrow{\psi^0} \mathscr{H}(X) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathscr{F}) \to 0$$

exakt. Daraus folgt die Behauptung. □

3.50 Aufgabe. Use the constructions of the present section to give an explicit description of the isomorphism in Korollar 3.49.

Wir sind nun in der Lage, das Lemma von Dolbeault (Theorem 3.30), das sich auf Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ bezieht, zum Theorem von Dolbeault für allgemeine Riemannsche Flächen zu verallgemeinern:

3.51 Theorem. (Theorem von Dolbeault) Sei X eine Riemannsche Fläche. Wir bezeichnen mit $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{1,0}$, $\mathscr{E}^{0,1}$ und $\mathscr{E}^{(2)}$ die Garben der glatten Funktionen, der glatten 1-Formen vom Typ $(1,0)$, der glatten 1-Formen vom Typ $(0,1)$ bzw. der glatten 2-Formen auf X. Außerdem seien $\mathscr{O}$ und Ω die Garbe der holomorphen Funktionen bzw. der holomorphen 1-Formen vom Typ $(1,0)$ auf X. Dann gilt:

(a) $H^1(X,\mathscr{O}) \cong \mathscr{E}^{0,1}(X)/\mathrm{d}''\mathscr{E}(X)$

(b) $H^1(X,\Omega) \cong \mathscr{E}^{(2)}(X)/\mathrm{d}\mathscr{E}^{1,0}(X)$.

Beweis. Für (a). Die Garbensequenz

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{d}''} \mathscr{E}^{0,1} \to 0$$

ist exakt, dabei folgt die Exaktheit bei $\mathscr{E}^{0,1}$ aus dem Lemma von Dolbeault (Theorem 3.30). Außerdem gilt $H^1(X,\mathscr{E}) = 0$ nach Aussage 3.26(a). Mit Korollar 3.49 ergibt sich nun die Behauptung.

Für (b). Wir argumentieren analog mit der exakten Garbensequenz

$$0 \to \Omega \to \mathscr{E}^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{E}^2 \to 0$$

und $H^1(X,\mathscr{E}^{1,0}) = 0$. Die Exaktheit bei $\mathscr{E}^2$ folgt wieder aus dem Lemma von Dolbeault. □

Auf Riemannschen Flächen X ist jede exakte Differentialform geschlossen, aber im Allgemeinen nicht jede geschlossene Differentialform exakt. Diese Frage ist mit einem anderen Koketten-Komplex verbunden, nämlich dem der *deRham-Kohomologie*:

$$0 \to \mathscr{E}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{E}^{(2)}(X) \to \dots\ ,$$

dabei ist $\mathscr{E}^{(q)}(X)$ der Raum der glatten q-Differentialformen auf X. Hier entsprechen Kozykel geschlossenen Differentialformen und Koränder exakten Differentialformen. Aus diesem Koketten-Komplex ergibt sich die *erste deRham-Kohomologiegruppe*

$$\begin{aligned}\mathrm{Rh}^1(X) := \frac{\text{Kozykel}}{\text{Koränder}} &= \frac{\ker\big(\mathscr{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{E}^{(2)}(X)\big)}{\mathrm{im}\big(\mathscr{E}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{E}^{(1)}(X)\big)} \\ &= \frac{\text{geschlossene 1-Formen auf } X}{\text{exakte 1-Formen auf } X}\ .\end{aligned}$$

$\mathrm{Rh}^1(X)$ beschreibt also, in welchem Umfang geschlossene 1-Formen auf X nicht exakt sind. Es gilt genau dann $\mathrm{Rh}^1(X) = 0$, wenn auf X jede geschlossene 1-Form auch exakt ist. In Kapitel 2 haben wir beim Riemannschen Abbildungssatz gesehen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn X einfach zusammenhängend ist. Das folgende Theorem von deRham stellt einen Zusammenhang zwischen der deRham-Kohomologie und unserer Garben-(Čech-)Kohomologie her.

3.52 Theorem. Sei X eine Riemannschen Fläche. Dann gilt

$$\mathrm{Rh}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}) .$$

Beweis. Die Garbe $\mathscr{Z}$ sei der Kern des Garbenhomomorphismus $\mathrm{d} : \mathscr{E}^{(1)} \to \mathscr{E}^{(2)}$, also die Garbe der geschlossenen, glatten Differentialformen auf X. Dann ist die Sequenz

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{Z} \to 0$$

exakt, die Exaktheit bei $\mathscr{Z}$ folgt dabei aus der Tatsache, dass *lokal* jede geschlossene Differentialform exakt ist. Da $H^1(X, \mathscr{E}) = 0$ nach Aussage 3.26(a) gilt, folgt die Behauptung wieder aus Korollar 3.49. □

3.11 Das Divisorenkalkül

Unser nächstes Ziel ist der Satz von Riemann-Roch, der eine Aussage über die Existenz von meromorphen Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen macht, die Pole höchstens an vorgegebenen Stellen und mit höchstens einer vorgegebenen Ordnung haben. Um die Lage der potentiellen Polstellen effizient angeben zu können, führen wir das Konzept eines *Divisors* ein.

3.53 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche.

(a) Ein *Divisor* [divisor] auf X ist eine Abbildung $D : X \to \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{supp}(D) := \{x \in X \mid D(x) \neq 0\}$ diskret ist. Die Menge der Divisoren auf X wird mit $\mathrm{Div}(X)$ bezeichnet; sie ist eine abelsche Gruppe mittels punktweiser Addition. Sind $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$, so schreiben wir $D \leq D'$, wenn $D(x) \leq D'(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Hierdurch wird eine Partialordnung auf $\mathrm{Div}(X)$ definiert.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}(X)$. Dann bezeichnen wir die Abbildung $x \mapsto \mathrm{ord}_x(f)$ (siehe Aussage 1.10[‡]) mit (f). Für $f \neq 0$ ist (f) ein Divisor auf X. Für $D \in \mathrm{Div}(X)$ sagen wir, dass f ein *Vielfaches* [multiple] des Divisors D ist, wenn $(f) \geq D$ gilt. Die Funktion f ist genau dann holomorph, wenn $(f) \geq 0$ ist.

(c) Ein Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ heißt *Hauptdivisor* [principal divisor], wenn es ein $f \in \mathcal{M}(X) \backslash \{0\}$ mit $(f) = D$ gibt. Zwei Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ heißen *äquivalent* [equivalent], wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.

(d) Sei $\omega \in \mathcal{M}^{(1,0)}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1, 0)$. Für $x \in X$ definieren wir $\mathrm{ord}_x(\omega) = \mathrm{ord}_x(f)$, wenn $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$ bezüglich einer Karte z von X gilt. (Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Wahl der Karte.) Dann ist die Abbildung $x \mapsto \mathrm{ord}_x(\omega)$, die wir mit (ω) bezeichnen, ebenfalls ein Divisor auf X.

[‡] Außerdem vereinbaren wir als Konvention $\mathrm{ord}_x(f) = \infty$, falls f auf einer ganzen Umgebung von x identisch verschwindet.

(e) Ein Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ heißt *kanonischer Divisor* [canonical divisor], wenn es ein $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ mit $(\omega) = D$ gibt.

3.54 Aufgabe. Let X be a Riemann surface. Show the following:

(a) For $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ and $\omega \in \mathcal{M}^{(1,0)}(X) \setminus \{0\}$ we have:

$$(fg) = (f) + (g) \qquad (1/f) = -(f) \qquad (f\omega)(f) + (\omega)\ .$$

(b) Any two canonical divisors on X are equivalent to each other.

Wir identifizieren Punkte $x \in X$ mit dem Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ mit $D(x) = 1$ und $D(x') = 0$ für alle $x' \in X \setminus \{x\}$. Daraus resultiert eine häufig benutzte Schreibweise von Divisoren als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Punkten: Sind $x_1, \ldots, x_n \in X$ verschiedene Punkte und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen, so wird mit

$$k_1\, x_1 + \ldots + k_n\, x_n = \sum_{j=1}^{n} k_j\, x_j$$

der Divisor

$$D : X \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \begin{cases} k_j & \text{für } x = x_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \end{cases}$$

bezeichnet. Wenn die Punkte von X auch „Zahlen“ sind (z.B. wenn X eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist), muss man dabei allerdings aufpassen, dass es zu keinen Missverständnissen kommt.

3.55 Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}$ und $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$. Dann ist $(f) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \in \mathrm{Div}(\mathbb{C})$, das heißt: (f) ist der Divisor D mit $D(1) = D(-1) = 1$, $D(0) = -2$ und $D(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$.

Sei X nun eine *kompakte* Riemannsche Fläche. Dann ist für jedes $D \in \mathrm{Div}(X)$ die Menge $\mathrm{supp}(D)$ endlich, und daher

$$\deg(D) := \sum_{x \in X} D(x)$$

eine endliche, ganze Zahl, die der *Grad* [degree] des Divisors D genannt wird. Hierdurch wird ein Gruppenhomomorphismus abelscher Gruppen

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$$

definiert. Weil meromorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen gleich viele Nullstellen und Pole (jeweils gezählt mit Vielfachheit) haben, gilt $\deg(D) = 0$ für jeden Hauptdivisor D.

Sei X eine Riemannsche Fläche und $D \in \mathrm{Div}(X)$. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ sei $\mathscr{O}_D(U)$ der kommutative Ring mit Eins derjenigen meromorphen Funktionen $f \in \mathscr{M}(U)$, die Vielfache von $-D$ sind, d.h. für die $(f) \geq -D$ gilt. Ausführlicher:

$$\mathscr{O}_D(U) = \big\{ f \in \mathscr{M}(U) \mid \mathrm{ord}_x(f) \geq -D(x) \text{ für alle } x \in U \ \big\}\ .$$

Dann wird durch $\mathscr{O}_D := \big(\mathscr{O}_D(U)\big)_{U \subset X}$ mit den üblichen Einschränkungshomomorphismen eine Garbe von kommutativen Ringen mit Eins definiert, und zwar eine Untergarbe von $\mathscr{M}$. Die

Schnitte von $\mathscr{O}_D$ sind meromorphe Funktionen mit folgenden Eigenschaften: An den $x \in X$ mit $D(x) > 0$ *können* sie Pole *höchstens* der Ordnung $D(x)$ haben, an den $x \in X$ mit $D(x) < 0$ *müssen* sie Nullstellen *mindestens* der Ordnung $-D(x)$ haben, und in den $x \in X$ mit $D(x) = 0$ sind sie holomorph.

Daher enthält $\mathscr{O}_D$ genau dann die Garbe $\mathscr{O}$, wenn $D \geq 0$ ist. Insbesondere gilt $\mathscr{O}_D = \mathscr{O}$ für $D = 0$. Sind $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ äquivalente Divisoren, so sind $\mathscr{O}_D$ und $\mathscr{O}_{D'}$ zueinander isomorph, und zwar wird für $\psi \in \mathscr{M}(X)$ mit $D - D' = (\psi)$ durch

$$\mathscr{O}_D(U) \to \mathscr{O}_{D'}(U),\ f \mapsto \psi \cdot f$$

ein entsprechender Garben-Isomorphismus definiert. Insbesondere gilt: Ist D ein Hauptdivisor, so ist $\mathscr{O}_D$ isomorph zu $\mathscr{O}$.

Falls X kompakt ist, gilt außerdem: Für $D \in \operatorname{Div}(X)$ mit $\deg(D) < 0$ ist $H^0(X, \mathscr{O}_D) = \mathscr{O}_D(X) = 0$. Das liegt daran, dass für jedes $f \in H^0(X, \mathscr{O}_D)$ aus der Annahme $f \neq 0$ wegen $(f) \geq -D$ der Widerspruch folgt: $0 = \deg(f) \geq -\deg(D) > 0$. Für $D = 0$ ist $H^0(X, \mathscr{O}_D) = H^0(X, \mathscr{O}) = \mathbb{C}$. Für $D > 0$ kann es hingegen nicht-konstante, globale Schnitte in $\mathscr{O}_D$ geben, so dass wir die Frage nach der Dimension des Vektorraums $H^0(X, \mathscr{O}_D)$ stellen können. Der Satz von Riemann-Roch, den wir im folgenden Abschnitt behandeln, gibt Antwort auf diese Frage.

In analoger Weise bezeichnen wir für $D \in \operatorname{Div}(X)$ mit Ω_D die Garbe der meromorphen 1-Formen ω vom Typ (1,0) mit $(\omega) \geq -D$. Für $D = 0$ ist $\Omega = \Omega_0$ die Garbe der holomorphen 1-Formen vom Typ (1,0). Ist $\omega \neq 0$ eine meromorphe 1-Form vom Typ (1,0) auf X und $K = (\omega)$, so wird für jedes $D \in \operatorname{Div}(X)$ durch

$$\mathscr{O}_{D+K}(U) \to \Omega_D(U),\ f \mapsto f \cdot \omega$$

ein Isomorphismus von Garben $\mathscr{O}_{D+K} \to \Omega_D$ definiert.

3.12 Der Satz von Riemann-Roch

3.56 Theorem. (Satz von Riemann-Roch) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g \in \mathbb{N}_0$ (siehe Definition 3.39 und Theorem 3.41) und $D \in \operatorname{Div}(X)$. Dann sind die Vektorräume $H^0(X, \mathscr{O}_D)$ und $H^1(X, \mathscr{O}_D)$ endlich-dimensional, und es gilt:

$$\dim H^0(X, \mathscr{O}_D) - \dim H^1(X, \mathscr{O}_D) = 1 - g + \deg(D)\ .$$

Für $D \geq 0$ ist in der Situation des Satzes von Riemann-Roch in jedem Fall $\dim H^0(X, \mathscr{O}_D) \geq 1$, denn die konstanten Funktionen auf X sind globale Schnitte von $\mathscr{O}_D$. Nicht-konstante Funktionen, die Schnitte von $\mathscr{O}_D$ sind, gibt es genau dann, wenn $\dim H^0(X, \mathscr{O}_D) > 1$ ist; sie haben notwendigerweise tatsächlich mindestens eine Polstelle. Ihre Existenz und ggfs. die Dimension ihres Vektorraums hängt nach dem Satz von Riemann-Roch mit dem *Spezialitätsindex* [index of speciality]

$$i(D) := \dim H^1(X, \mathscr{O}_D)$$

zusammen. Diese Zahl ist nach unserem bisherigen Wissensstand schwer zu verstehen; im kommenden Abschnitt werden wir sie aber mittels der *Serre-Dualität* mit $\dim H^0(X, \Omega_{-D})$ in Verbindung bringen. Als Folge wird sich ergeben, dass $i(D) = 0$ für jeden Divisor D mit

$\deg(D) > 2g-2$ gilt. In jedem Fall gilt $i(D) \geq 0$, weswegen der Satz von Riemann-Roch die Unterschranke

$$\dim H^0(X, \mathscr{O}_D) \geq 1 - g + \deg(D)$$

ergibt.

Andererseits gilt für $D < 0$: $H^0(X, \mathscr{O}_D) = 0$ und daher $i(D) = g - 1 - \deg(D)$.

Das folgende Korollar stellt eine Verfeinerung von Satz 3.46 dar:

3.57 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht g und $x \in X$. Dann gibt es eine nicht-konstante, meromorphe Funktion $f \in \mathscr{M}(X)$, die in x einen Pol höchstens von Ordnung $g+1$ hat, und ansonsten holomorph ist.

Beweis. Sei $D = (g{+}1)\cdot x \in \operatorname{Div}(X)$ (im Sinne unserer Identifikation von Punkten mit Divisoren). Nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 3.56) ist

$$\dim H^0(X, \mathscr{O}_D) = 1 - g + \deg(D) + i(D) \geq 1 - g + \deg(D) = 2\,.$$

Deshalb existiert eine nicht-konstante Funktion $f \in H^0(X, \mathscr{O}_D)$, und diese hat die gewünschten Eigenschaften. □

Korollar 3.57 besagt, dass in der beschriebenen Situation $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine „verzweigte" Überlagerung mit höchstens $n+1$ Blättern über der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ ist.

3.58 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann sind äquivalent:

(a) X hat das Geschlecht Null.

(b) X ist einfach zusammenhängend.

(c) X ist biholomorph äquivalent zur Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus dem großen Riemannschen Abbildungssatz (Theorem 2.42), und die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) folgt aus Satz 3.32(b). Hat umgekehrt X das Geschlecht Null, so existiert nach Korollar 3.57 eine nicht-konstante meromorphe Funktion f auf X, die in einem Punkt einen Pol erster Ordnung hat, und ansonsten holomorph ist. Eine solche Abbildung ist eine biholomorphe Abbildung $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$. □

Der Beweis des Satzes von Riemann-Roch beruht auf einem Induktionsargument, und zwar werden wir zu einer bestimmten kurzen exakten Garbensequenz die zugehörige exakte Kohomologiesequenz (Theorem 3.48). In der Garbensequenz spielt die sogenannte Wolkenkratzer-Garbe eine Rolle, die wir jetzt einführen:

Sei X eine Riemannsche Fläche, und $p \in X$. Für jede offene Menge $U \subset X$ sei

$$\mathbb{C}_p(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls } p \in U \\ 0 & \text{falls } p \notin U \end{cases}.$$

In eine Übungsaufgabe ist gezeigt worden, dass hierdurch mit geeigeneten Einschränkungshomomorphismen eine Garbe $\mathbb{C}_p$ auf X definiert wird. Sie heißt die *Wolkenkratzer-Garbe* [skyscraper sheaf] in p. Offenbar gilt $H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C}$.

3.59 Aussage. $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$.

Beweis. Für jede beliebige offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X gibt es eine Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$, so dass p in nur einer offenen Teilmenge aus $\mathfrak{V}$ enthalten ist. Dann gilt $Z^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}_p) = 0$ und somit auch $H^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}_p) = 0$. Deswegen ist $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$. □

Beweis des Satzes von Riemann-Roch (Theorem 3.56). Wir zeigen zunächst, dass der Satz von Riemann-Roch für $D = 0$ gilt: In diesem Fall ist $H^0(X, \mathscr{O}) = \mathscr{O}(X) = \mathbb{C}$, also $\dim H^0(X, \mathscr{O}) = 1$. Außerdem ist $\dim H^1(X, \mathscr{O}) = g$ per Definition und $\deg(D) = 0$.

Es sei nun $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein beliebiger Divisor, $p \in X$ ein beliebiger Punkt, und $D' := D + p \in \mathrm{Div}(X)$. Wir zeigen, dass wenn der Satz von Riemann-Roch für einen der beiden Divisoren D und D' gilt, dass dann dieser Satz auch für den anderen Divisor gilt. Weil jeder Divisor auf X in der Form

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n - q_1 - q_2 - \ldots q_m$$

mit Punkten $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m \in X$ geschrieben werden kann, folgt dann induktiv, dass der Satz von Riemann-Roch für alle Divisoren auf X gilt.

Wir werden eine kurze exakte Sequenz von Garben

$$0 \to \mathscr{O}_D \xrightarrow{\iota} \mathscr{O}_{D'} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \to 0 \qquad (\Diamond 1)$$

definieren. Wegen $D \leq D'$ ist $\mathscr{O}_D \subset \mathscr{O}_{D'}$, und ι sei die dazu gehörende Inklusionsabbildung von Garben. Um den Garben-Homomorphismus β zu definieren, wählen wir eine Karte (V, z) von X mit $p \in V$ und $z(p) = 0$. Sei nun eine offene Umgebung $U \subset X$ vorgegeben. Ist $p \notin X$, so sei $\beta_U \equiv 0$. Ist $p \in X$, so stellen wir f bezüglich z als Laurent-Reihenentwicklung dar:

$$f = \sum_{k=-(n+1)}^{\infty} c_k \, z^k ,$$

dabei ist $n = D(p)$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Wir setzen dann

$$\beta_U(f) := c_{-(k+1)} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_p(U) .$$

Hierdurch wird offensichtlich ein garben-surjektiver Garben-Homomorphismus $\beta : \mathscr{O}_{D'} \to \mathbb{C}_p$ definiert, so dass die kurze Sequenz ($\Diamond$1) exakt ist. Nach Theorem 3.48 ist dann die zugehörige Kohomologiesequenz ebenfalls exakt:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_D) \xrightarrow{\iota^0} H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathscr{O}_D) \xrightarrow{\iota^1} H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathbb{C}_p) .$$

Wir haben $H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C}$ und $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$ nach Aussage 3.59, und daher hat diese exakte Sequenz die folgende Gestalt:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_D) \xrightarrow{\iota^0} H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^0} \mathbb{C} \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathscr{O}_D) \xrightarrow{\iota^1} H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^1} 0 . \qquad (\Diamond 2)$$

Diese exakte Sequenz „spaltet“ in zwei kurze exakte Sequenzen: Es sei $V = \mathrm{im}(\beta^0)$ und $W = \mathbb{C}/V$. Dann ist die Exaktheit von ($\Diamond$2) äquivalent zur Exaktheit der folgenden beiden Sequenzen:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_D) \xrightarrow{\iota^0} H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^0} V \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to W \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathscr{O}_D) \xrightarrow{\iota^1} H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^1} 0 .$$

Deshalb sind alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional, und ihre Dimensionen sind wie folgt verknüpft:

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) &= \dim H^0(X, \mathscr{O}_D) + \dim V \\ \dim H^1(X, \mathscr{O}_D) &= \dim W + \dim H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \ . \end{aligned}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen und Anwendung von $\dim(V) + \dim(W) = 1 = \deg(D') - \deg(D)$ ergibt sich

$$H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) + H^1(X, \mathscr{O}_D) = \dim H^0(X, \mathscr{O}_D) + \dim H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) + \deg(D') - \deg(D) \ ,$$

also

$$H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) - \deg(D') = H^0(X, \mathscr{O}_D) - \dim H^1(X, \mathscr{O}_D) - \deg(D) \ .$$

Daraus folgt, dass der Satz von Riemann-Roch genau dann für D' gilt, wenn er für D gilt. $\square$