Wir möchten eine L^2-Norm auch auf Riemannschen Flächen einführen. Leider ist das global nicht auf koordinatenunabhängige Weise möglich, weil das Flächenintegral $\int f(z)^2 \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$ nicht koordinatenunabhängig ist. Wir führen die L^2-Norm daher für lokal definierte Objekte, nämlich für Koketten ein.

Sei X eine Riemannsche Fläche. Wir wählen endlich viele Karten (U_i^*, z_i) von X ($i \in \{1,\dots,n\}$), so dass das Bild $z_i[U_i] \subset \mathbb{C}$ jeweils eine Kreisscheibe ist. Man beachte, dass wir nicht fordern, dass $\mathfrak{U}^* = (U_i^*)_{i=1,\dots,n}$ ganz X überdeckt. Weiter wählen wir offene Umgebungen $U_i \subset U_i^*$, und betrachten die offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=1,\dots,n}$ des Raums $|\mathfrak{U}| := \bigcup_{i=1}^n U_i$.

In dieser Situation definieren wir auf den abelschen Gruppen von Koketten $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{O})$ ($q \in \{0,1\}$) bezüglich der offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ L^2-Normen, indem wir definieren:

$$\text{für } \eta = (f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{O}): \quad \|\eta\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} := \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{L^2(U_i)} := \sum_{i=1}^n \|f_i \circ z_i^{-1}\|^2_{L^2(z_i[U_i])}$$

$$\text{für } \xi = (f_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}): \quad \|\xi\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} := \sum_{i,j=1}^n \|f_{ij}\|^2_{L^2(U_i\cap U_j)} := \sum_{i,j=1}^n \|f_{ij} \circ z_i^{-1}\|^2_{L^2(z_i[U_i\cap U_j])}\,.$$

Die L^2-Norm von Koketten wird also mithilfe der gewählten Karten z_i definiert. Wir bezeichnen den Unterraum von $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{O})$ der q-Koketten mit endlicher L^2-Norm mit $C^q_{L^2}(\mathfrak{U},\mathscr{O})$. Diese Unterräume sind analog wie $L^2(D,\mathscr{O})$ Hilberträume. Die Koketten in $C^q_{L^2}(\mathfrak{U},\mathscr{O})$, die Kozykel sind, bilden einen abgeschlossenen Untervektorraum von $C^q_{L^2}(\mathfrak{U},\mathscr{O})$, den wir mit $Z^q_{L^2}(\mathfrak{U},\mathscr{O})$ bezeichnen.

3.8 Das Geschlecht Riemannscher Flächen

Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathscr{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Weil $\mathscr{O}$ eine Garbe von Vektorräumen ist, trägt auch die erste Kohomologiegruppe $H^1(X,\mathscr{O})$ die Struktur eines Vektorraums. Aus dieser Kohomologiegruppe werden wir wichtige Informationen über die Existenz von meromorphen Funktionen auf X herleiten.

3.39 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $\mathscr{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Wenn der Vektorraum $H^1(X,\mathscr{O})$ endlich-dimensional ist, so sagt man, dass X *endliches Geschlecht* [finite genus] hat. In diesem Fall heißt die Zahl $g := \dim H^1(X,\mathscr{O})$ das *Geschlecht* [genus] der Riemannschen Fläche X.

Man kann zeigen, dass für kompakte Riemannsche Flächen X diese Definition des Geschlechts mit der Definition aus der Differentialtopologie bzw. der simplizialen Homologie übereinstimmt (man wähle eine Triangulierung von X und zähle die Ecken E, die Kanten K und die Flächen F, dann ist $E - K + F =$ Euler-Charakteristik $= 2 - 2g$).

3.40 Beispiel. In Korollar 3.33 haben wir letztlich aus dem Lemma von Dolbeault gefolgert, dass einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen das Geschlecht 0 haben. Insbesondere hat die (kompakte) Riemannsche Zahlenkugel das Geschlecht Null.

3.41 Theorem. Kompakte Riemannsche Flächen X haben endliches Geschlecht, mit anderen Worten: $\dim H^1(X,\mathscr{O}) < \infty$.

Der Beweis dieses Theorems erfordert etwas Aufwand und zwei Lemmata.

Es seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{1\le i\le n}$ und $\mathfrak{V} = (V_i)_{1\le i\le n}$ zwei Familien von offenen Mengen in der Riemannschen Fläche X derselben endlichen Anzahl n. (In der Regel werden $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ hier keine Überdeckungen von X sein.) Wir schreiben $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$, wenn für jedes i gilt: $V_i \subset\subset U_i$, d.h. wenn V_i jeweils eine relativ-kompakte Teilmenge von U_i ist. In dieser Situation erhält man durch Einschränkung eine kanonische Einschränkungsabbildung $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{O}) \to C^q(\mathfrak{V},\mathscr{O})$. Diese Abbildung erhält Kozykel und Koränder, und führt daher auch zu einer Einschänkungsabbildung der Kohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}) \to H^1(\mathfrak{V},\mathscr{O})$. Wir fassen also im Folgenden Koketten, Kozykel, Koränder, Kohomologieklassen bezüglich $\mathfrak{U}$ bei Bedarf auch als Koketten, Kozykel, Koränder, Kohomologieklassen bezüglich $\mathfrak{V}$ auf. Dabei gilt $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$ für jedes $\xi \in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{O})$, $q \in \{0,1\}$, und somit $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{O}) \subset C^q_{L^2}(\mathfrak{V},\mathscr{O})$.

Wegen Aussage 3.38 gibt es in dieser Situation zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Untervektorraum $A \subset Z^1_{L^2}(\mathfrak{U},\mathscr{O})$ von endlicher Kodimension, so dass gilt:

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \le \varepsilon \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{für jedes } \xi \in A\,. \tag{$\diamondsuit$}$$

3.42 Lemma. Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathfrak{U}^* = (U_i^*, z_i)_{1\le i\le n}$ eine endliche Familie von Kartenumgebungen von X, so dass das Bild $z_i[U_i]$ jeweils eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist (wie am Ende von Abschnitt 3.7). Es seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{1\le i\le n}$, $\mathfrak{V} = (V_i)_{1\le i\le n}$ und $\mathfrak{W} = (W_i)_{1\le i\le n}$ weitere Familien von offenen Mengen mit $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass es für jedes $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V},\mathscr{O})$ Elemente $\zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U},\mathscr{O})$ und $\eta \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W},\mathscr{O})$ gibt, so dass

$$\zeta = \xi + \delta^0(\eta) \quad \text{in } Z^1_{L^2}(\mathfrak{W},\mathscr{O}) \tag{$\circ$1}$$

und

$$\max(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \;\le\; C\cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \tag{$\circ$2}$$

gilt.

Beweis von Lemma 3.42. Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. Schritt. Sei $\xi = (f_{ij})_{1\le i,j\le n} \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V},\mathscr{O})$ gegeben. Dann konstruieren wir $\zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U},\mathscr{O})$ und $\eta \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W},\mathscr{O})$ gibt, so dass die Bedingung ($\circ$1) gilt. Sei $\mathscr{E}$ die Garbe der glatten Funktionen. Nach Aussage 3.22 (angewendet auf die Riemannsche Fläche $|\mathfrak{V}| = \bigcup_{i=1}^n V_i$) ist $H^1(\mathfrak{V},\mathscr{E}) = 0$, deshalb existiert eine Kokette $(g_i)_{1\le i\le n} \in C^0(\mathfrak{V},\mathscr{E})$ mit

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{auf } V_i \cap V_j\,.$$

Weil f_{ij} holomorph ist, gilt $0 = \mathrm{d}''f = \mathrm{d}''g_j - \mathrm{d}''g_i$ jeweils auf $V_i \cap V_j$. Nach dem Garbenaxiom (LG) (angewendet auf die Garbe der glatten 1-Formen vom Typ $(0,1)$ auf $|\mathfrak{V}|$) fügen sich die $\mathrm{d}''g_i$ zu einer glatten Differentialform ω vom Typ $(0,1)$ auf $|\mathfrak{V}|$ mit $\omega|_{V_i} = \mathrm{d}''g_i$ zusammen. Wegen $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V}$, ist auch $|\mathfrak{W}|$ relativ-kompakt in $|\mathfrak{V}|$, und daher existiert eine glatte Funktion ψ auf X mit $\psi|_{|\mathfrak{W}|} = 1$ und $\operatorname{supp}(\psi) \subset |\mathfrak{V}|$. Indem wir $\psi\,\omega$ durch Null fortsetzen, können wir $\psi\,\omega$ als eine glatte Differentialform vom Typ $(0,1)$ auf $|\mathfrak{U}^*|$ auffassen. Weil die U_i^* jeweils vermittels der Karte z_i biholomorph zu Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ sind, existieren nach dem Lemma von Dolbeault (Theorem 3.30) Funktionen $h_i \in \mathscr{E}(U_i^*)$, so dass $\mathrm{d}''h_i = \psi\,\omega$ auf U_i^* gilt. Wir setzen nun $F_{ij} = h_j - h_i$ auf $U_i^* \cap U_j^*$. Dann gilt

$$\mathrm{d}''F_{ij} = \mathrm{d}''h_j - \mathrm{d}''h_i = \psi\,\omega - \psi\,\omega = 0 \quad \text{auf } U_i^* \cap U_j^*\,.$$

Also ist $F_{ij} \in \mathscr{O}(U_i^* \cap U_j^*)$. Wir definieren nun

$$\zeta = (F_{ij}|_{U_i \cap U_j})_{1 \leq i,j \leq n} \; .$$

Offenbar erfüllt ζ die Kozykelbedingung, und wegen $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$ ist ζ außerdem quadrat-integrierbar. Also gilt $\zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$. Es gilt jeweils

$$\mathrm{d}'' h_i = \psi\, \omega = \omega = \mathrm{d}'' g_i \quad \text{auf } W_i \; ,$$

also ist $h_i - g_i$ holomorph auf W_i . Wegen $W_i \subset\subset V_i$ ist $h_i - g_i$ außerdem beschränkt auf W_i , und daher ist

$$\eta = (h_i - g_i|_{W_i})_{1 \leq i \leq n} \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) \; .$$

Nun gilt

$$F_{ij} - f_{ij} = (h_j - h_i) - (g_j - g_i) = (h_j - g_j) - (h_i - g_i) \quad \text{auf } W_i \cap W_j$$

und damit $\zeta - \xi = \delta^0(\eta)$. Daher gilt $(\circ 1)$.

2. Schritt. Wir zeigen nun, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass auch die Abschätzung $(\circ 2)$ gilt. Dazu betrachten wir den Hilbertraum

$$H = Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \times Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathscr{O}) \times C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$$

mit der Norm $\|\cdot\|_H$, die durch

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H^2 = \|\zeta\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} + \|\xi\|^2_{L^2(\mathfrak{V})} + \|\eta\|^2_{L^2(\mathfrak{W})} \quad \text{für } (\zeta, \xi, \eta) \in H$$

charakterisiert ist. Wir betrachten außerdem die Teilmenge

$$L = \left\{ \, (\zeta, \xi, \eta) \in H \;\middle|\; \zeta = \xi + \delta^0(\eta) \text{ in } Z^1_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) \, \right\} .$$

L ist ein abgeschlossener Unterraum von H und deshalb selber ein Hilbertraum (mit der Einschränkung der Norm $\|\cdot\|_H$ auf L). Aus dem 1. Schritt ergibt sich, dass die stetige, lineare Abbildung

$$\pi : L \to Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathscr{O}), \; (\zeta, \xi, \eta) \mapsto \xi$$

surjektiv ist. Nach dem Satz von der offenen Abbildung aus der Funktionalanalysis ist die Abbildung π daher offen. Das bedeutet, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für jedes $x = (\zeta, \xi, \eta) \in L$ gilt: $\|x\|_H \leq C \cdot \|\pi(x)\|_{L^2(\mathfrak{V})}$. Damit gilt dann

$$\max(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leq \|(\zeta, \xi, \eta)\|_H \leq C \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}$$

und damit $(\circ 2)$. □

Mit dem folgenden Lemma befreien wir uns von der Einschränkung auf quadrat-integrierbare Kozykel aus Lemma 3.42. Es besagt, dass in der Situation von Lemma 3.42 der Bildvektorraum der kanonischen Einschränkungsabbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \to H^1(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$$

endlich-dimensional ist.

3.43 Lemma. Unter denselben Voraussetzungen wie in Lemma 3.42 gibt es einen endlich-dimensionalen Vektorraum $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$, so dass gilt: Für jedes $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$ gibt es Elemente $\sigma \in S$ und $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$ mit

$$\sigma = \xi + \delta^0(\eta) \quad \text{in } Z^1(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) .$$

Beweis. Sei $C > 0$ die Konstante aus Lemma 3.42 und $\varepsilon := \frac{1}{2C}$. Nach ($\diamondsuit$) gibt es einen Untervektorraum $A \subset Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$ von endlicher Kodimension, so dass

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{für jedes } \xi \in A \text{ gilt.}$$

Wir wählen S als das Orthokomplement von A im Hilbertraum $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$. Dann ist S ein endlich-dimensionaler Vektorraum, der komplementär zu A ist, d.h. es gilt $A + S = Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$ und $A \cap S = \{0\}$.

Sei nun $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$ vorgegeben. Wegen $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ ist $M := \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$ und somit $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathscr{O})$. Nach Lemma 3.42 existieren daher $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$ und $\eta_0 \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$ mit

$$\zeta_0 = \xi + \delta^0(\eta_0) \text{ in } Z^1_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) \qquad \text{sowie} \qquad \|\zeta_0\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_0\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq CM .$$

Wegen der Konstruktion von S gibt es eine eindeutige (orthogonale) Zerlegung von $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$

$$\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0 \quad \text{mit} \quad \xi_0 \in A,\ \sigma_0 \in S .$$

Wir konstruieren hiervon ausgehend nun induktiv Folgen von Elementen

$$\zeta_\nu \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \qquad \eta_\nu \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) \qquad \xi_\nu \in A \qquad \sigma_\nu \in S$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\zeta_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta^0(\eta_\nu)$ in $Z^1_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$

(2) $\zeta_\nu = \xi_\nu + \sigma_\nu$ (die eindeutige orthogonale Zerlegung von $\zeta_\nu \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$)

(3) $\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-\nu} \cdot CM$

Nehmen wir dafür an, dass die Elemente für ein ν schon konstruiert sind. Wir konstruieren dann die entsprechenden Elemente für $\nu+1$. Weil (2) eine orthogonale Zerlegung von ζ_ν ist, gilt nach (3)

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-\nu} \cdot CM$$

und daher wegen der Wahl von A und ε

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \cdot \|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \varepsilon \cdot 2^{-\nu}\, CM = 2^{-(\nu+1)}\, M .$$

Nach Lemma 3.42 existieren daher $\zeta_{\nu+1} \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$ und $\eta_{\nu+1} \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$ mit

$$\zeta_{\nu+1} = \xi_\nu + \delta^0(\eta_{\nu+1}) \text{ in } Z^1_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) \qquad \text{sowie} \qquad \|\zeta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-(\nu+1)}\, CM .$$

Wir nehmen nun die eindeutige orthogonale Zerlegung $\zeta_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$ von $\zeta_{\nu+1} \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$ mit $\xi_{\nu+1} \in A$ und $\sigma_{\nu+1} \in S$, womit der Induktionsschritt der Konstruktion abgeschlossen ist.

Nach (2) und (1) gilt

$$\xi_\nu + \sigma_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta^0(\eta_\nu)$$

und deshalb für gegebenes $k \in \mathbb{N}$

$$\xi_k + \sum_{\nu=0}^{k} \sigma_\nu = \xi_{k-1} + \delta^0(\eta_k) + \sum_{\nu=0}^{k-1} \sigma_\nu = \xi_{k-2} + \delta^0(\eta_{k-1} + \eta_k) + \sum_{\nu=0}^{k-2} \sigma_\nu = \ldots = \xi + \delta^0\left(\sum_{\nu=0}^{k} \eta_\nu\right) \quad (\clubsuit)$$

in $Z^1_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$. Andererseits konvergieren wegen (3) die Reihen

$$\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu \in S \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$$

absolut in den jeweiligen Banachräumen. Außerdem gilt $\|\xi_k\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_k\|_{L^2(\mathfrak{U})} \to 0$ für $k \to \infty$, und somit ist $\lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$. Also folgt aus ($\clubsuit$): $\sigma = \xi + \delta^0(\eta)$, was zu zeigen war. □

Sei X ein topologischer Raum, $\mathscr{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X, und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Für jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von X ist $\mathfrak{U} \cap Y := (U_i \cap Y)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Der Einschränkungshomomorphismus $Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathscr{F})$ bildet Koränder auf Koränder ab, und induziert daher einen Einschränkungshomomorphismus $H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathscr{F})$. Indem man hiervon den induktiven Grenzwert (wie in Abschnitt 3.4) bildet, erhält man einen Einschränkungshomomorphismus $H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(Y, \mathscr{F})$.

3.44 Satz. Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset\subset X$ eine relativ-kompakte, offene Teilmenge. Dann ist das Bild des Einschränkungshomomorphismus

$$H^1(X, \mathscr{O}) \to H^1(Y, \mathscr{O})$$

endlich-dimensional.

Beweis. Wir wählen eine endliche Familie von Karten $\mathfrak{U}^* = (U_i^*, z_i)_{i=1,\ldots,n}$ sowie Familien offener Teilmengen $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$, so dass $Y \subset |\mathfrak{W}|$ und alle $z_i[U_i^*]$, $z_i[U_i]$ und $z_i[W_i]$ Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ sind.

Weil die U_i und die W_i zu Kreisscheiben biholomorph sind, gilt $H^1(U_i, \mathscr{O}) = 0$ und $H^1(W_i, \mathscr{O}) = 0$ nach Satz 3.32(a). Also sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ Leray-Überdeckungen von $|\mathfrak{U}|$ bzw. von $|\mathfrak{W}|$ bezüglich $\mathscr{O}$. Nach dem Satz von Leray (Satz 3.27) folgt

$$H^1(|\mathfrak{U}|, \mathscr{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \quad \text{und} \quad H^1(|\mathfrak{W}|, \mathscr{O}) = H^1(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) .$$

Der Einschränkungshomomorphismus $H^1(X, \mathscr{O}) \to H^1(Y, \mathscr{O})$ kann wie folgt „faktorisiert“ (als Komposition von Einschränkungshomomorphismen geschrieben) werden:

$$H^1(X, \mathscr{O}) \to H^1(|\mathfrak{U}|, \mathscr{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \to H^1(\mathfrak{W}, \mathscr{O}) = H^1(|\mathfrak{W}|, \mathscr{O}) \to H^1(Y, \mathscr{O}) .$$

Aus Lemma 3.43 folgt, dass das Bild des Einschränkungshomomorphismus $H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \to H^1(\mathfrak{W}, \mathscr{O})$ endlich-dimensional ist. Daher hat auch $H^1(X, \mathscr{O}) \to H^1(Y, \mathscr{O})$ endlich-dimensionales Bild. □

Beweis von Theorem 3.41. Weil die Riemannsche Fläche X kompakt ist, kann in Satz 3.44 $Y = X$ gewählt werden. □

3.9 Von der Existenz meromorpher Funktionen

Die Endlichkeitsaussagen aus dem vorherigen Abschnitt haben Folgen für die Existenz (nicht-konstanter) meromorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen.

3.45 Satz. Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset\subset X$ eine relative-kompakte, offene Teilmenge, und $a \in Y$. Dann existiert eine meromorphe Funktion $f \in \mathscr{M}(Y)$ die in a einen Pol hat und auf $Y \setminus \{a\}$ holomorph ist.

Beweis. Nach Satz 3.44 ist die Dimension k des Bildes des Einschränkungshomomorphismus $H^1(X, \mathscr{O}) \to H^1(Y, \mathscr{O})$ endlich. Wir wählen eine holomorphe Karte (U_1, z) von X mit $a \in U_1 \subset Y$ und $z(a) = 0$. Außerdem setzen wir $U_2 = X \setminus \{a\}$. Dann ist $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ eine offene Überdeckung von X. Wir betrachten für $j = 1, \ldots, k+1$ den Kozykel $\zeta_j \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O})$, der auf $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{a\}$ durch die dort holomorphe Funktion z^{-j} gegeben wird (und ansonsten die Kozykelbedingung erfüllt). Weil das Bild von $H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \to H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathscr{O})$ eine Dimension $\leq k$ hat, sind die Kohomologieklassen zu $\zeta_j|_Y$ in $H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathscr{O})$ mit $j \in \{1, \ldots, k+1\}$ linear abhängig. Also existieren Zahlen $c_1, \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$ (nicht alle Null) und eine Kokette $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathscr{O})$ mit

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \, \zeta_j = \delta^0(\eta) \quad \text{in } Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathscr{O}),$$

also

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \, z^{-j} = f_2 - f_1 \quad \text{auf } U_1 \cap U_2 \cap Y.$$

Nach dem Garbenaxiom (LG) für die Garbe $\mathscr{M}$ der meromorphen Funktionen auf Y existiert also eine Funktion $f \in \mathscr{M}(Y)$, die auf $U_1 \cap Y$ mit $f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j \, z^{-j}$ übereinstimmt, und auf $U_2 \cap Y = Y \setminus \{a\}$ mit f_2 übereinstimmt. Wegen der ersten Übereinstimmung hat f in a einen Pol, und wegen der zweiten Übereinstimmung ist f auf $Y \setminus \{a\}$ holomorph. Also hat f die gewünschten Eigenschaften. □

3.46 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Es seien paarweise verschiedene Punkte $a_1, \ldots, a_n \in X$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathscr{M}(X)$ mit $f(a_i) = c_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Weil X kompakt ist, kann in Satz 3.46 $Y = X$ gewählt werden. Danach existiert für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine meromorphe Funktion $f_i \in \mathscr{M}(X)$, die einen Pol in a_i hat, aber in allen anderen Punkten holomorph ist. Wir wählen ein $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{f_i(a_j) - f_i(a_k) \mid j, k \neq i\}$. Für $j \neq i$ betrachten wir dann die meromorphe Funktion

$$g_{ij} = \frac{f_i - f_i(a_j)}{f_i - f_i(a_j) + \lambda_{ij}} \in \mathscr{M}(X).$$

Sie ist in allen a_k mit $k \in \{1, \ldots, n\}$ holomorph, und es gilt $g_{ij}(a_i) = 1$ und $g_{ij}(a_j) = 0$. Daher ist

$$h_i = \prod_{j \neq i} g_{ij}$$