Kapitel 3

Garben und Kohomologie auf Riemannschen Flächen

Die primäre Literaturquelle für dieses Kapitel ist [Fo], Kapitel 2. Eine weitere gute Standard-Quelle, die allerdings die Garben-Sprache weniger verwendet, ist [FK], Chapter III.

3.1 Prägarben und Garben

3.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum mit Topologie (System der offenen Mengen) $\mathfrak{T}$. Eine *Prägarbe* [presheaf] von abelschen Gruppen auf X ist ein Paar $(\mathscr{F}, \rho)$ bestehend aus

(a) einer Familie $\mathscr{F} = (\mathscr{F}(U))_{U \in \mathfrak{T}}$ von abelschen Gruppen,

(b) einer Familie $\rho = (\rho^U_V)_{U,V \in \mathfrak{T}, V \subset U}$ von Gruppen-Homomorphismen

$$\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V) \quad \text{wann immer } U, V \in \mathfrak{T} \text{ mit } V \subset U \text{ ist,}$$

so dass die folgenden Bedingungen gelten:

$$\rho^U_U = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)} \quad \text{für jedes } U \in \mathfrak{T}\,,$$
$$\rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W \quad \text{für } U, V, W \in \mathfrak{T} \text{ mit } W \subset V \subset U\,.$$

Meistens schreibt man nur $\mathscr{F}$ statt $(\mathscr{F}, \rho)$. Die Homomorphismen ρ^U_V heißen *Einschränkungshomomorphismen* [restriction homomorphisms]. Für $f \in \mathscr{F}(U)$ schreibt man anstatt von $\rho^U_V(f)$ meistens $f|_V$. Die Elemente von $\mathscr{F}(U)$ werden manchmal *Schnitte* [sections] von $\mathscr{F}$ genannt, die Elemente von $\mathscr{F}(X)$ *globale Schnitte* [global sections].

Entsprechend wie Prägarben von abelschen Gruppen kann man auch Prägarben von Mengen, Vektorräumen, Ringen usw. definieren.

3.2 Beispiele. (a) Sei X ein topologischer Raum mit Topologie $\mathfrak{T}$. Für $U \in \mathfrak{T}$ sei $\mathscr{C}(U)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, und für $U, V \in \mathfrak{T}$ mit $V \subset U$ sei

$$\rho^U_V : \mathscr{C}(U) \to \mathscr{C}(V),\ f \mapsto f|_V\,.$$

Dann ist $(\mathscr{C}, \rho)$ eine Prägarbe von Ringen (oder Vektorräumen) auf X.

(b) Sei X eine Riemannsche Fläche mit Topologie $\mathfrak{T}$. Für $U \in \mathfrak{T}$ sei $\mathscr{O}(U)$ bzw. $\mathscr{M}(U)$ der Raum der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, und für $U, V \in \mathfrak{T}$ mit $V \subset U$ sei wieder $\rho_V^U : f \mapsto f|_V$. Dann sind $(\mathscr{O}, \rho)$ und $(\mathscr{M}, \rho)$ Prägarben von Ringen (genauer: von kommutativen Ringen mit Eins) auf X, genannt die *Garbe der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen auf* X.*

(Vorsicht: $\mathscr{M}$ ist *keine* Prägarbe von Körpern. Warum nicht?)

In analoger Weise kann man die Prägarbe $\mathscr{E}$ der glatten Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ definieren.

Wo es Prägarben gibt, gibt es bestimmt auch Garben. Die werden in der folgenden Definition eingeführt:

3.3 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe $\mathscr{F}$ auf X heißt eine *Garbe* [sheaf], wenn für jede offene Menge $U \subset X$ und jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen in X mit $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ die folgenden *Garbenaxiome* [sheaf axioms] erfüllt sind:

(GL) Sind $f, g \in \mathscr{F}(U)$ und gilt $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$, so ist $f = g$.

(LG) Sind $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ gegeben, und gilt

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{für alle } i, j \in I, \tag{$*$}$$

so existiert ein $f \in \mathscr{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Das in Teil (b) der Definition konstruierte f ist wegen Teil (a) der Definition eindeutig bestimmt. Außerdem zeigen (a) und (b) (angewendet mit $U = \varnothing$ und $I = \varnothing$), dass $\mathscr{F}(\varnothing)$ aus genau einem Element besteht.

3.4 Beispiele. (a) Die Prägarben $\mathscr{C}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{E}$ aus Beispiel 3.2 sind offenbar sogar Garben.

(b) Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Für $\varnothing \neq U \subset X$ offen sei $\mathscr{G}(U)$ die Menge der lokal konstanten Funktionen $f : U \to G$ (d.h. f ist auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant). Außerdem sei $\mathscr{G}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Für $U, V \subset X$ offen mit $\varnothing \neq V \subset U$ sei $\rho_V^U : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(V),\ f \mapsto f|_V$ die übliche Restriktion; außerdem sei $\rho_\varnothing^U : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(V),\ f \mapsto \varnothing$. Dann ist $(\mathscr{G}, \rho)$ eine Garbe, die *lokal konstante Garbe* genannt und oft einfach mit G bezeichnet wird.

3.5 Aufgabe. Let X be a topological space and G an abelian group. For any open set $\varnothing \neq U \subset X$ let $\tilde{\mathscr{G}}(U)$ be the set of constant functions $f : U \to G$, also let $\tilde{\mathscr{G}}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Define the restriction operators ρ_V^U naturally. (Note the difference to Beispiel 3.4(b)!)

(a) Show that $(\tilde{G}, \rho)$ is a presheaf.

(b) Discuss whether $(\tilde{G}, \rho)$ is in fact a sheaf.

Das Prinzip, das hinter der Konstruktion der „Funktionengarben“ $\mathscr{C}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{E}$ in den obigen Beispielen steht, wird in der folgenden Übungsaufgabe abstrakt herausgearbeitet:

*Der Buchstabe $\mathscr{O}$ in der Bezeichnung der Garbe der holomorphen Funktionen steht vielleicht für den Namen des japanischen Mathematikers Kiyoshi Oka, der entscheidend zur Entwicklung der Kohomologietheorie für allgemeine komplexe Mannigfaltigkeiten beigetragen hat.

3.6 Aufgabe. It becomes very tedious to check that whether or not something is a (pre-)sheaf or not. In this question we automate the proof for sheaves of functions. Suppose that X is a topological space and $\mathscr{F}$ is defined by $\mathscr{F}(U) := \{f : U \to G \mid f \text{ has property } P\}$ for any open set $U \subset X$, where P is a property that can hold for functions $f : U \to G$. For example, 'f is continuous' and 'f is locally constant' are examples of such properties.

(a) Suppose that property P is *restrictable*. That means if $f : U \to G$ has property P and $V \subset U$ is open, then $f|_V$ also has the property P. Show that $\mathscr{F}$ is a presheaf.

(b) Suppose further that property P is *local*. That means the following: Take any open set $U \subset X$ and a function $f : U \to G$. Then f has property P if P holds for all restrictions $f|_{U_i}$ for any open cover $\{U_i\}$ of U. Show that $\mathscr{F}$ is a sheaf.

3.7 Aussage. Sei X ein topologischer Raum und $(\mathscr{F}, \rho)$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit Eins auf X. Für $U \subset X$ offen sei $\mathscr{F}^*(U)$ die (multiplikative) abelsche Gruppe der invertierbaren Elemente des kommutativen Rings $\mathscr{F}(U)$. Für $V \subset U \subset X$ offen und $f \in \mathscr{F}^*(U)$ ist $f|_V \in \mathscr{F}^*(V)$. Mit $\mathscr{F}^*$ und dieser Restriktion wird eine Garbe von abelschen Gruppen auf X definiert, die *Garbe der invertierbaren Elemente von* $\mathscr{F}$.

3.8 Beispiel. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $\mathscr{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Dann ist die Garbe $\mathscr{O}^*$ der invertierbaren holomorphen Funktionen auf X gegeben durch

$$\mathscr{O}^*(U) = \big\{ f \in \mathscr{O}(U) \,\big|\, f \text{ ist nullstellenfrei} \big\} \quad \text{für } U \subset X \text{ offen}.$$

Beweis von Aussage 3.7. Wir bezeichnen das Einselement (multiplikatives neutrales Element) des Rings $\mathscr{F}(U)$ mit 1_U. Sei $V \subset U \subset X$ offen. Weil die Restriktion $\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ ein Homomorphismus von Ringen mit Eins ist, gilt $1_U|_V = 1_V$. Sei nun $f \in \mathscr{F}^*(U)$ gegeben. Nach Definition existiert also ein $g \in \mathscr{F}(U)$ mit $g \cdot f = 1_U$. Dann ist $g|_V \in \mathscr{F}(V)$ und es gilt

$$(g|_V) \cdot (f|_V) = (g \cdot f)|_V = 1_U|_V = 1_V .$$

Also ist $f|_V \in \mathscr{F}^*(V)$. Daher ist $\mathscr{F}^*$ mit der durch ρ gegebenen Restriktion eine Prägarbe.

Für $\mathscr{F}^*$ ist das Garbenaxiom (GL) offenbar erfüllt. Wir überprüfen, dass auch das Garbenaxiom (LG) gilt: Dazu seien offene Mengen $U, (U_i)_{i \in I}$ mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, sowie $f_i \in \mathscr{F}^*(U_i)$ gegeben, so dass die Bedingung $(*)$ in (LG) gilt. Insbesondere gilt $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$. Wegen dem Garbenaxiom (LG) für $\mathscr{F}$ existiert daher ein $f \in \mathscr{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Es ist zu zeigen, dass $f \in \mathscr{F}^*(U)$ ist. Dazu: Weil f_i in $\mathscr{F}(U_i)$ invertierbar ist, existiert jeweils ein $g_i \in \mathscr{F}(U_i)$ mit $g_i \cdot f_i = 1_{U_i}$. Für $i, j \in I$ gilt

$$\begin{aligned}(g_i)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_i)|_{U_i \cap U_j} = (g_i \cdot f_i)|_{U_i \cap U_j} = 1_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = 1_{U_i \cap U_j} = \ldots = (g_j)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_j)|_{U_i \cap U_j} \\ = (g_j)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_i)|_{U_i \cap U_j} .\end{aligned}$$

Weil $(f_i)|_{U_i \cap U_j} \in \mathscr{F}^*(U_i \cap U_j)$ ist, folgt $g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}$. Nach dem Garbenaxiom (LG) für $\mathscr{F}$ existiert daher ein $g \in \mathscr{F}(U)$ mit $g|_{U_i} = g_i$. Für jedes $i \in I$ ist $(g \cdot f)|_{U_i} = g_i \cdot f_i = 1_{U_i} = (1_U)|_{U_i}$, woraus mit dem Garbenaxiom (GL) für $\mathscr{F}$ folgt: $g \cdot f = 1_U$ und somit $f \in \mathscr{F}^*(U)$. □

3.2 Halme und Keime

Wir wollen nun den Begriff des „Keims“ einer Funktion in der Sprache von Garben formulieren.

Sei $\mathscr{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X und $a \in X$. Dann betrachten wir Paare (U, f) von offenen Umgebungen U von $a \in X$ und $f \in \mathscr{F}(U)$. Auf diesen Paaren führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein:

$$(U, f) \sim_a (V, g) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Umgebung } W \subset U \cap V \text{ von } a \text{ mit } f|_W = g|_W .$$

Die Äquivalenzklassen heißen *Keime* [germs] von $\mathscr{F}$ an der Stelle a. Die Menge der Keime an der Stelle $a \in X$ wird mit $\mathscr{F}_a$ bezeichnet und heißt *Halm* [stalk] von $\mathscr{F}$ bei a. Jeder Halm ist offenbar wieder eine abelsche Gruppe. Wir schreiben auch f_a anstelle von $[(U, f)]_a$.

3.9 Beispiel. Sei X eine Riemannsche Fläche und $a \in X$. Wegen der „Starrheit“ von holomorphen Funktionen (Identitätssatz) ist eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer Umgebung U von a in X schon durch die Werte von f und allen Ableitungen an der Stelle a, d.h. durch die Taylorreihe von f in a bestimmt. Das bedeutet, dass der Keim von f isomorph zur Taylorreihe von f in a ist. Deshalb ist der Halm $\mathscr{O}_a$ der Keime von in a holomorphen Funktionen isomorph zum Ring $\mathbb{C}\{z - a\}$ der konvergenten (d.h. mit positivem Konvergenzradius) Potenzreihen in der Variable $z - a$ mit komplexen Koeffizienten.

In analoger Weise ist der Halm $\mathscr{M}_a$ der Keime in a meromorpher Funktionen isomorph zum Ring der Laurentreihen mit endlichem Hauptteil und (mit positivem Konvergenzradius) konvergentem Nebenteil

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k \, (z - a)^k \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}, \; c_k \in \mathbb{C}.$$

Die folgende Übungsaufgabe zeigt, dass die Halme $\mathscr{F}_a$ einer Garbe $\mathscr{F}$ dieselbe algebraische Struktur besitzen wie die Räume von Schnitten $\mathscr{F}(U)$. Dabei ist die Abbildung $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_a$ für jede offene Umgebung $a \in U \subset X$ ein Homomorphismus.

3.10 Aufgabe. Take a topological space X, a presheaf $\mathscr{F}$, an open set U, and a point $p \in U$. For any section $f \in \mathscr{F}(U)$ there is a natural projection from (U, f) to its equivalance class of germs at p. This gives a projection π_p from $\mathscr{F}(U)$ to $\mathscr{F}_p$.

(a) Define a group structure on the stalk $\mathscr{F}_p$ such that the projection π_p is a group homomorphism.

(b) Suppose that $f, g \in \mathscr{F}(U)$ are two sections of a sheaf. Show that $f = g$ if and only if $\pi_p(f) = \pi_p(g)$ for all points $p \in U$.

3.3 Homomorphismen von Garben

Zu algebraischen oder analytischen Strukturen gehören immer auch die passenden Homomorphismen. Hier führen wir die entsprechenden Homomorphismen für Prägarben und für Garben ein.

3.11 Definition. Sei X ein topologischer Raum, und $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ zwei (Prä-)Garben von abelschen Gruppen auf X. Dann ist ein *Homomorphismus von (Prä-)Garben* [(pre-)sheaf homomorphism] $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ eine Familie (f_U) von Gruppenhomomorphismen $f_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ (wobei U die offenen Teilmengen von X durchläuft), so dass für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ das folgende Diagramm jeweils kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r] & \mathscr{G}(V). \end{tikzcd}$$

Der Homomorphismus f heißt *Isomorphismus* [isomorphism], wenn alle f_U Isomorphismen sind.

Offenbar ist die Identität auf einer (Prä-)Garbe $\mathscr{F}$ ein Isomorphismus von (Prä-)Garben.

In der folgenden Aufgabe werden der Kern $\ker(f)$ und das (Prägarben-)Bild $\mathrm{im}^P(f)$ von Prägarben-Homomorphismen $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ definiert. $\ker(f)$ und $\mathrm{im}^P(f)$ sind in jedem Fall Prägarben, und zwar Unter-Prägarben von $\mathscr{F}$ bzw. $\mathscr{G}$. Man sagt, dass f *injektiv* [injective] bzw. *prägarben-surjektiv* [presheaf surjective] ist, wenn $\ker(f) = \{0\}$ bzw. $\mathrm{im}^P(f) = \mathscr{G}$ ist. f ist genau dann ein Prägarben-Isomorphismus, wenn f sowohl injektiv als auch prägarben-surjektiv sind.

Sind $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ sogar Garben, so ist der Prägarben-Homomorphismus $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Garben-Homomorphismus. In diesem Fall ist zwar stets $\ker(f)$ eine Garbe, aber $\mathrm{im}^P(f)$ ist im Allgemeinen immer noch *keine* Garbe, sondern nur eine Prägarbe (*Vorsicht!*). Man bezeichnet mit $\mathrm{im}(f)$ die kleinste Untergarbe von $\mathscr{G}$, die $\mathrm{im}^P(f)$ enthält. $\mathrm{im}(f)$ heißt die *Bildgarbe* [image sheaf] von f. Der Garben-Homomorphismus f heißt *garben-surjektiv* [sheaf surjective] oder kurz *surjektiv* [surjective], wenn $\mathrm{im}(f) = \mathscr{G}$ ist.

3.12 Beispiel. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann ist $\exp(2\pi i \cdot\,) : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^*$ ein Homomorphismus von Garben, genauer gesagt ist dieser gegeben durch die Familie von Homomorphismen von Ringen mit Eins:

$$\mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}^*(U),\ f \mapsto \exp(2\pi i\, f)\ ,$$

wobei $U \subset X$ alle offenen Teilmengen durchläuft. Der Kern dieses Garben-Homomorphismus besteht aus allen f, die nur ganzzahlige Werte annehmen (solche sind lokal konstant). Sein Prägarben-Bild besteht aus allen Funktionen $g \in \mathscr{O}^*(U)$, die „einen Logarithmus besitzen“, d.h. für die ein $f \in \mathscr{O}(U)$ mit $\exp(2\pi i f) = g$ existiert. Ist U nicht einfach zusammenhängend, so ist daher $\mathrm{im}^P(\exp(2\pi i \cdot\,))(U) \subsetneq \mathscr{O}^*(U)$. Hingegen ist die Bildgarbe $\mathrm{im}(\exp(2\pi i \cdot\,)) = \mathscr{O}^*$. Also ist $\exp(2\pi i \cdot\,)$ garben-surjektiv, aber nicht prägarben-surjektiv.

3.13 Aufgabe. In this question we explore morphisms of sheaves and how some constructions for abelian groups carry over. Let $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ be a morphism of sheaves on a topological space X. Define $\ker\varphi$ by

$$(\ker\varphi)(U) := \{f \in \mathscr{F}(U) \mid f \in \ker\varphi_U\}.$$

and $\mathrm{im}^P\varphi$ by

$$(\mathrm{im}^P\varphi)(U) := \{g \in \mathscr{G}(U) \mid g \in \mathrm{im}\varphi_U\}.$$

(a) Prove that both $\ker\varphi$ and $\mathrm{im}^P\varphi$ are presheaves on X.

(b) Show further that $\ker\varphi$ is a sheaf.

(c) However, use the example of $X = \mathbb{C}$, $\varphi = \exp : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^*$ (ie, $f \mapsto \exp \circ f$), $U = \mathbb{C}^\times$, and $f(z) = z \in \mathscr{O}^*(U)$ to show that $\mathrm{im}^P \varphi$ is not a sheaf.

We define the image sheaf $\mathrm{im}\varphi$ to be the smallest sheaf that contains $\mathrm{im}^P\varphi$. We say that φ is injective if $\ker\varphi = 0$ and that it is (sheaf) surjective if $\mathrm{im}\varphi = \mathscr{G}$.

(d) Prove that φ is injective if and only if $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ is injective for all open sets $U \subset X$.

(e) Show how the morphism φ induces a homomorphism of groups $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$.

(f) Prove that φ is injective (resp. surjective) if and only if φ_x is injective (resp. surjective).

(g) Show that $\exp : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^*$ is surjective.

3.14 Definition. Seien $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ Exemplare einer algebraischen Struktur (also beispielsweise Gruppen, Ringe, ... oder auch Prägarben oder Garben), und $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ und $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ entsprechende Homomorphismen. Man nennt

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}$$

eine *exakte Sequenz* [exact sequence], wenn das Bild von φ gleich dem Kern von ψ ist. Im Fall von Garben-Homomorphismen ist mit dem Bild von φ die Bildgarbe gemeint. Längere Sequenzen von Homomorphismen nennt man entsprechend exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt sind.

Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz* [short exact sequence], dabei ist mit dem linken Pfeil die Abbildung $0 \mapsto 0_{\mathscr{F}}$ und mit dem rechten Pfeil die Abbildung, die identisch Null ist, gemeint.

3.15 Aufgabe. Let A, B, and C be abelian groups. Suppose that there exist homomorphisms ϕ and ψ such that

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

is an exact sequence. State what properties ϕ and ψ must have for this sequence to be exact. What is the relationship between the groups A, B, and C?

3.16 Beispiele. Sei X eine Riemannsche Fläche.

(a) Das folgende ist eine kurze exakte Sequenz:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O} \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathscr{O}^* \to 1\,.$$

(b) Wir bezeichnen mit Ω^1 bzw. Ω^2 die Garbe der holomorphen 1-Formen vom Typ $(1,0)$ bzw. die Garbe der holomorphen 2-Formen auf X. Dann ist die folgende kurze Sequenz exakt:

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathscr{O} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2 \to 0\,.$$

(c) Sei $\mathscr{E}^{(0,1)}$ die Garbe der glatten 1-Formen vom Typ $(0,1)$ auf X. Wir werden später mit Hilfe des Dolbeault'schen Lemmas sehen, dass die kurze Sequenz

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{d}''} \mathscr{E}^{(0,1)} \to 0$$

exakt ist. Ebenso ist eine exakte Sequenz:

$$0 \to \bar{\mathscr{O}} \to \mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{d}'} \mathscr{E}^{(1,0)} \to 0\,.$$

3.17 Aufgabe. Suppose $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0$ is a short exact sequence of sheaves on the topological space X.

(a) Show that for every open set $U \subset X$, the sequence

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}(U)$$

is exact.

(b) Illustrate by an example that $\psi : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{H}(U)$ does not need to be surjective.

3.4 Garbenkohomologie

Kohomologie ist ein sehr abstraktes mathematisches Konzept zur Konstruktion von Folgen von abelschen Gruppen zu topologischen Räumen, das ursprünglich der algebraischen Geometrie entstammt, und heute in vielen verschiedenen Bereichen eine wichtige Rolle spielt. Hier interessieren wir uns vor allem für die sogenannte Čech-Kohomologie zu einer Garbe $\mathscr{F}$ von abelschen Gruppen auf einem beliebigen topologischen Raum X, und zwar wollen wir in diesem Abschnitt vor allem (nur) die erste Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathscr{F})$ definieren. Diese Kohomologiegruppen werden für unsere Untersuchung von Riemannschen Flächen X eine ganz wesentliche Rolle spielen.

Wir definieren diese Kohomologiegruppe und verwandte Objekte zunächst in einer „groben“ Version, die von der Wahl einer offenen Überdeckung von X abhängen. Indem wir immer feinere und feinere offene Überdeckung betrachten, werden wir dann durch eine Art Grenzwert die eigentliche Kohomologiegruppe erhalten, die dann nicht mehr von der Überdeckung abhängt.

3.18 Definition. Sei X ein topologischer Raum, und $\mathscr{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Wir fixieren eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X.

(a) Sei $q \in \mathbb{N}$. Eine *q-Kokette* [q-cochain] von $\mathscr{F}$ bezüglich $\mathfrak{U}$ ist eine Familie $(f_{i_0,\ldots,i_q})_{(i_0,\ldots,i_q) \in I^{q+1}}$, so dass

$$f_{i_0,\ldots,i_q} \in \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}) \quad \text{für alle } (i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}$$

gilt. Die Menge $C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ der q-Koketten von $\mathscr{F}$ bezüglich $\mathfrak{U}$ ist eine abelsche Gruppe, wobei die Addition von q-Koketten komponentenweise definiert ist. $C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ heißt die *q-te Kokettengruppe* [q-th cochain group] von $\mathscr{F}$ bezüglich $\mathfrak{U}$.

(b) Für $q \in \{0,1\}$ definieren wir *Korand-Operatoren*† [coboundary operators] $\delta^q : C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ wie folgt:

(i) Wir definieren
$$\delta^0 : C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$
für $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ durch $\delta^0((f_i)) = (g_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ mit
$$g_{ij} = f_j - f_i \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \quad \text{für } i,j \in I \ .$$
Ausdrücke wie $f_j - f_i$ sind dabei hier und im Folgenden so zu verstehen, dass f_i und f_j auf den gemeinsamen Definitionsbereich $U_i \cap U_j$ eingeschränkt wird, bevor die Differenz gebildet wird.

(ii) Wir definieren
$$\delta^1 : C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to C^2(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$
für $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ durch $\delta^1((f_{ij})) = (g_{ijk})_{i,j,k\in I} \in C^2(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ mit
$$g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j \cap U_k) \quad \text{für } i,j \in I \ .$$

Die Korand-Operatoren δ^q sind offensichtlich Homomorphismen von abelschen Gruppen.

3.19 Beispiel. Sei $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Dann gilt $\delta^0((f_i)) = 0$ genau dann, wenn $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ für alle $i,j \in I$ ist. Wegen dem Garbenaxiom (LG) ist das genau dann der Fall, wenn sich die f_i zu einem globalen Schnitt $f \in \mathscr{F}(X)$ zusammensetzen, d.h. so dass $f|U_i = f_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Die Elemente von
$$Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) := \ker(\delta^1) \subset C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$
heißen *(1-)Kozykel* [1-cocycles]. Das bedeutet, dass eine Kokette $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ genau dann ein Kozykel ist, wenn er die sogenannte *Kozykelbedingung* [cocycle relation]
$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{jeweils auf } U_i \cap U_j \cap U_k \quad \text{für } i,j,k \in I \tag{KZB}$$
erfüllt. Sie impliziert (Übungsaufgabe: warum?)
$$f_{ii} = 0 \quad \text{und} \quad f_{ji} = -f_{ij} \quad \text{für } i,j \in I \ .$$

Die Elemente von
$$B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) := \operatorname{im}(\delta^0) \subset C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$
heißen *(1-)Koränder* [1-coboundaries]. Ein $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ ist also genau dann ein Korand (man sagt auch: (f_{ij}) *spaltet* [splits]), wenn es eine 0-Kokette $(g_i)_{i\in I}$ gibt, so dass
$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{jeweils auf } U_i \cap U_j \quad \text{für } i,j \in I$$
gilt.

† Übrigens: Dass die von uns betrachtete Struktur als *Ko*homologie bezeichnet wird, korrespondiert zur „Richtung“ dieser Operatoren δ. Bei einem entsprechenden Homologie-Funktor würde man Rand-Operatoren $\delta : C_q \to C_{q-1}$ betrachten.

3.20 Aufgabe. Show $B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \subset Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, i.e. that every coboundary is a cocycle.

3.21 Definition. Die Quotientengruppe

$$H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) := Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \,/\, B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$

heißt *(erste) Kohomologiegruppe* [(1st) cohomology group] mit Koeffizienten in $\mathscr{F}$ bezüglich der Überlagerung $\mathfrak{U}$. Die Elemente von $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ heißen *Kohomologieklassen* [cohomology classes]. Zwei Kozykel in $Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ heißen *kohomolog* [cohomologous], wenn sie zur selben Kohomologieklasse in $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ gehören; dies ist also genau dann der Fall, wenn ihre Differenz ein Korand in $B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ ist.

In der folgenden Aussage und der anschließenden Übungsaufgabe wenden wir die bisher definierten Begriffe in konkreten Situationen an.

3.22 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\mathscr{E}$ die Garbe der glatten Funktionen auf X, und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{E}) = 0$.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass $Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{E}) = B^1(\mathfrak{U},\mathscr{E})$, d.h. also, dass es zu jedem Kozykel $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{E})$ ein $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{E})$ gibt, so dass $f_{ij} = g_i - g_j$ für alle $i,j \in I$ gilt.

Um die g_i zu konstruieren, verwenden wir, dass nach Satz 1.18 eine Zerlegung der Eins $(\psi_i)_{i\in I}$ zu $\mathfrak{U}$ existiert. Für $i,k \in I$ ist die glatte Funktion $\psi_k\, f_{ik}$ zunächst auf $U_i \cap U_k$ definiert. Weil der Träger von ψ_k in U_k enthalten ist, lässt sich diese Funktion aber durch Null glatt auf ganz U_i fortsetzen; auf diese Weise fassen wir $\psi_k\, f_{ik}$ als Element von $\mathscr{E}(U_i)$ auf. Wir definieren nun

$$g_i = \sum_{k\in I} \psi_k\, f_{ik} \,.$$

Wegen der lokalen Endlichkeit der Zerlegung der Eins wird hierdurch ein Element $g_i \in \mathscr{E}(U_i)$ definiert, d.h. wir erhalten $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{E})$. Nun gilt für $i,j \in I$ jeweils auf $U_i \cap U_j$:

$$g_i - g_j = \sum_{k\in I} \psi_k\, f_{ik} - \sum_{k\in I} \psi_k\, f_{jk} = \sum_{k\in I} \psi_k\,(f_{ik} - f_{jk}) \overset{\text{(KZB)}}{=} \sum_{k\in I} \psi_k\, f_{ij} = f_{ij} \,.$$

Damit ist $(f_{ij}) = \delta^0((g_i)) \in B^1(\mathfrak{U},\mathscr{E})$. □

3.23 Aufgabe. Suppose that X is a simply connected Riemann surface and $\mathfrak{U}$ an open covering of X. Show the following:

(a) $H^1(\mathfrak{U},\mathbb{C}) = 0$.
[Hint. Due to Aussage 3.22 one has $Z^1(\mathfrak{U},\mathbb{C}) \subset Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{E}) = B^1(\mathfrak{U},\mathscr{E})$.]

(b) $H^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = 0$.
[Hint. For $(a_{jk}) \in Z^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z})$, consider $\exp(2\pi i a_{jk})$ and use (a).]

Here $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{Z}$ denotes the sheaf of locally constant functions on X with values in the complex numbers resp. in the integers, see Beispiel 3.4(b).

Die Gruppe $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ hängt von der Wahl der Überdeckung $\mathfrak{U}$ ab. Von dieser Abhängigkeit wollen wir uns nun befreien, um eine Version $H^1(X,\mathfrak{F})$ der Kohomologiegruppe zu erhalten, die nur noch vom topologischen Raum X und der Garbe $\mathscr{F}$ abhängt.

Dazu untersuchen wir im Folgenden das Verhalten der Gruppe $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, wenn wir die Überdeckung $\mathfrak{U}$ verfeinern. Dabei heißt eine offene Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K}$ von X *feiner* als eine andere offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von X, wenn es zu jedem $k \in K$ ein $i \in I$ mit $V_k \subset U_i$ gibt. Ist dies der Fall, so schreiben wir auch $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$. Das bedeutet also, dass es eine *Verfeinerungsabbildung* [refining mapping] $\tau : K \to I$ gibt, so dass $V_k \subset U_{\tau(k)}$ für alle $k \in K$ gilt.

3.24 Aussage. Sei X ein topologischer Raum, $\mathscr{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X, und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ und $\mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K}$ zwei offene Überdeckungen von X mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$.

(a) Sei $\tau : K \to I$ eine Verfeinerungsabbildung, d.h. es gelte $V_k \subset U_{\tau(k)}$ für alle $k \in K$. Für $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ definieren wir $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}((f_{ij})) = (\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell\in K}$ mit

$$\tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k),\tau(\ell)}|_{V_k\cap V_\ell} \quad \text{für } k,\ell \in K\,.$$

Die so definierte Abbildung $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ bildet Kozykel bezüglich $\mathfrak{U}$ auf Kozykel bezüglich $\mathfrak{V}$ und Koränder bezüglich $\mathfrak{U}$ auf Koränder bezüglich $\mathfrak{V}$ ab. Sie induziert daher einen Gruppen-Homomorphismus

$$\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})\,.$$

(b) Die in (a) konstruierte Abbildung $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ ist unabhängig von der Wahl der Verfeinerungsabbildung τ.

(c) Die Abbildung $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ ist injektiv.

(d) Ist $\mathfrak{W}$ eine weitere offene Überdeckung von X mit $\mathfrak{W} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, so gilt

$$\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}} = \theta^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} \circ \theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}\,.$$

Beweis. Für (a). Die Kozykelbedingung (KZB) wird durch die Einschränkung auf $V_k\cap V_\ell$ offenbar jeweils erhalten, deshalb bildet $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ Kozykel in $Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ auf Kozykel in $Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ ab. Ist $(f_{ij})_{i,j\in I} \in B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ ein Korand bezüglich $\mathfrak{U}$, so gibt es per Definition ein $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ mit $f_{ij} = g_i - g_j$ für $i,j \in I$. Mit $\tilde{g}_k = g_{\tau(k)}|_{V_k}$ ist dann $(\tilde{g}_k)_{k\in K} \in C^0(\mathfrak{V},\mathscr{F})$, und für $k,\ell \in K$ ist

$$\tilde{g}_k - \tilde{g}_\ell = (g_{\tau(k)} - g_{\tau(\ell)})|_{V_k\cap V_\ell} = f_{\tau(k),\tau(\ell)}|_{V_k\cap V_\ell} = \tilde{f}_{k\ell}\,.$$

Also ist $(\tilde{f}_{k\ell}) \in B^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$.

Für (b). Seien $\tau,\hat{\tau} : K \to I$ zwei Verfeinerungsabbildungen zu $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, d.h. für $k \in K$ gilt $V_k \subset U_{\tau(k)}, U_{\hat{\tau}(k)}$. Sei $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ gegeben, und wir definieren $(\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell\in K}, (\hat{f}_{k\ell})_{k,\ell\in K} \in Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ durch

$$\tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k),\tau(\ell)}|_{V_k\cap V_\ell} \quad \text{bzw.} \quad \hat{f}_{k\ell} = f_{\hat{\tau}(k),\hat{\tau}(\ell)}|_{V_k\cap V_\ell} \quad \text{für } k,\ell \in K\,.$$

Wir haben zu zeigen, dass diese beiden Kozykel zueinander kohomolog sind, also zum selben Element von $H^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ gehören. Für $k \in K$ gilt $V_k \subset U_{\tau(k)} \cap U_{\hat{\tau}(k)}$ und deshalb können wir $(h_k)_{k\in K} \in C^0(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ durch

$$h_k = f_{\tau(k),\hat{\tau}(k)}|_{V_k} \quad \text{für } k \in K$$

definieren. Dann gilt für $k, \ell \in K$ auf $V_k \cap V_\ell$ aufgrund der Kozykelbedingung (KZB)

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{k\ell} - \hat{f}_{k\ell} &= f_{\tau(k),\tau(\ell)} - f_{\hat{\tau}(k),\hat{\tau}(\ell)} = f_{\tau(k),\tau(\ell)} + f_{\tau(\ell),\hat{\tau}(k)} - f_{\tau(\ell),\hat{\tau}(k)} - f_{\hat{\tau}(k),\hat{\tau}(\ell)} \\ &\overset{\text{(KZB)}}{=} f_{\tau(k),\hat{\tau}(k)} - f_{\tau(\ell),\hat{\tau}(\ell)} = h_k - h_\ell \,.\end{aligned}$$

Somit ist $(\tilde{f}_{k\ell} - \hat{f}_{k\ell})_{k,\ell} = \delta^0((h_k)_k) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$.

Für (c). Wir haben zu zeigen, dass der Kern des Homomorphismus $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ trivial ist. Dazu sei $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ gegeben, so dass $(\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell\in K} \in B^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ ist. In dieser Situation ist zu zeigen, dass $(f_{ij})_{i,j\in I} \in B^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ ist.

Wegen der Voraussetzung $(\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell\in K} \in B^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ existiert $(g_k)_{k\in K} \in C^0(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ mit $\tilde{f}_{k\ell} = g_k - g_\ell$ für $k, \ell \in K$. Sei $i \in I$. Dann gilt für beliebige $k, \ell \in K$ auf $U_i \cap V_k \cap V_\ell$:

$$g_k - g_\ell = \tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k),\tau(\ell)} \overset{\text{(KZB)}}{=} f_{\tau(k),i} + f_{i,\tau(\ell)} = f_{i,\tau(\ell)} - f_{i,\tau(k)}$$

und somit

$$f_{i,\tau(k)} + g_k = f_{i,\tau(\ell)} + g_\ell \,.$$

Wegen dem Garbenaxiom (LG), angewendet auf der offenen Menge $U_i = \bigcup_{k\in K}(U_i \cap V_k)$ existiert daher ein $h_i \in \mathscr{F}(U_i)$, mit

$$h_i|_{U_i\cap V_k} = f_{i,\tau(k)} + g_k \quad \text{für alle } k \in K \,.$$

Hierdurch wird $(h_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ definiert. Sei nun $i, j \in I$ gegeben. Dann gilt für alle $k \in K$ auf $(U_i \cap U_j) \cap V_k$:

$$h_i - h_j = (f_{i,\tau(k)} + g_k) - (f_{j,\tau(k)} + g_k) = f_{i,\tau(k)} - f_{j,\tau(k)} \overset{\text{(KZB)}}{=} f_{ij} \,.$$

Somit ist $(f_{ij}) = \delta^0((h_i)) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.

Für (d). Sei τ_1 bzw. τ_2 eine Verfeinerungsabbildung zu $\mathfrak{W} < \mathfrak{V}$ bzw. zu $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$. Dann ist $\tau_2 \circ \tau_1$ eine Verfeinerungsabbildung zu $\mathfrak{W} < \mathfrak{U}$. Wegen (b) können wir diese Verfeinerungsabbildungen zur Definition der Abbildungen θ^*_* verwenden, und dann ist die behauptete Gleichung nach der Definition aus (a) offensichtlich. □

Nach dieser Vorarbeit können wir die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathscr{F})$ als „induktiver Grenzwert" der Gruppen $H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ definieren, wobei $\mathfrak{U}$ alle offenen Überdeckungen von X durchläuft. Dafür definieren wir auf der disjunkten Vereinigung

$$\dot{\bigcup_{\mathfrak{U}}} H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$$

($\mathfrak{U}$ durchläuft auch hier alle offenen Überdeckungen von X) eine Äquivalenzrelation $\sim$: Zwei Kohomologieklassen $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ und $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathscr{F})$ sollen äquivalent sein ($\xi \sim \eta$), wenn es eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ (d.h. eine offene Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}'$) gibt, so dass $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) = \theta^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta) \in H^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ gilt. Dann definieren wir die *erste Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in $\mathscr{F}$* als

$$H^1(X, \mathscr{F}) = \left(\dot{\bigcup_{\mathfrak{U}}} H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\right) \Big/ \sim \,.$$

Die Addition von $H^1(X,\mathscr{F})$ wird „repräsentantenweise“ definiert, genauer gesagt: Seien $x,y \in H^1(X,\mathscr{F})$ gegeben. Dann wählen wir Repräsentanten $\xi \in H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ von x bzw. $\eta \in H^1(\mathfrak{U}',\mathscr{F})$ von y. Weiter wählen wir eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{V}$ der offenen Überdeckungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$. Wir definieren dann $x+y \in H^1(X,\mathscr{F})$ als die $\sim$-Äquivalenzklasse von $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) + \theta^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta) \in H^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})$. Man sieht leicht, dass diese Definition von den getroffenen Wahlen unabhängig ist, und dass hierdurch $H^1(X,\mathscr{F})$ eine abelsche Gruppe wird.

Wenn die Garbe $\mathscr{F}$ zusätzliche Struktur besitzt, es sich also beispielsweise um eine Garbe von Ringen, Vektorräumen, ... handelt, so erhalten in entsprechenderweise Weise auch die Kohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ und dann auch $H^1(X,\mathscr{F})$ die entsprechende Struktur, werden also zu Ringen, Vektorräumen, ...

Indem jedem Element von $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ die entsprechende Äquivalenzklasse in $H^1(X,\mathscr{F})$ zugeordnet wird, erhalten wir eine Abbildung

$$H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to H^1(X,\mathscr{F}) .$$

Diese ist wegen Aussage 3.24 injektiv. Daraus folgt sofort die folgende Aussage:

3.25 Aussage. Sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Dann gilt $H^1(X,\mathscr{F})=0$ genau dann, wenn $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})=0$ für jede offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X ist.

Durch Kombination dieser Aussage mit Aussage 3.22 und Aufgabe 3.23 ergibt sich ohne Weiteres:

3.26 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $\mathscr{E}$ die Garbe der glatten Funktionen auf X.

(a) Es gilt $H^1(X,\mathscr{E})=0$.

(b) Wenn X einfach zusammenhängend ist, so gilt $H^1(X,\mathbb{C})=0$ und $H^1(X,\mathbb{Z})=0$.

Zum Abschluss des Abschnitts definieren wir noch „nullte“ Kozykel, Koränder und Kohomologieklassen, hauptsächlich um spätere Notationen zu vereinheitlichen: Für eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ des topologischen Raums X definieren wir:

$$\begin{aligned} Z^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) &:= \ker(\delta^0 : C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})) \\ B^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) &:= 0 \\ H^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) &:= Z^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})/B^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) = Z^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) . \end{aligned}$$

Nach Definition ist eine 0-Kokette $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ also genau dann ein 0-Kozykel, wenn jeweils $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ für $i,j\in I$ gilt. Nach dem Garbenaxiom (LG) bedeutet das, dass sich die f_i zu einem globalen Schnitt $f \in \mathscr{F}(X)$ zusammensetzen. Deshalb gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$H^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) = Z^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \cong \mathscr{F}(X) .$$

Die Kohomologiegruppen $H^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ sind also von der Wahl der Überdeckung $\mathfrak{U}$ unabhängig. Deshalb können wir einfach definieren:

$$H^0(X,\mathscr{F}) = \mathscr{F}(X) .$$

3.5 Der Satz von Leray

Die Konstruktion der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathscr{F})$ aus dem vorherigen Abschnitt ist kompliziert, vor allem weil wir einen induktiven Grenzwert über alle offenen Überdeckungen des topologischen Raums X betrachten mussten. Der folgende Satz von Leray zeigt, dass es in bestimmten Fällen leichter geht, dass man nämlich $H^1(X, \mathscr{F})$ mittels einer einzigen, „speziell gewählten“ Überdeckung berechnen kann:

3.27 Satz. (Leray) Sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Sei weiter $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, so dass

$$H^1(U_i, \mathscr{F}) = 0 \quad \text{für alle } i \in I$$

gilt. Dann ist

$$H^1(X, \mathscr{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \ .$$

Eine derartige offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ heißt *Leray-Überdeckung* [Leray covering] (erster Ordnung) für die Garbe $\mathscr{F}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine Leray-Überdeckung für $\mathscr{F}$. Es genügt zu zeigen, dass für jede feinere Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K} < \mathfrak{U}$ von X die Abbildung $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ aus Aussage 3.24 ein Isomorphismus ist. Weil $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ nach Aussage 3.24(c) in jedem Fall injektiv ist, bleibt nur die Surjektivität zu zeigen.

Dafür sei ein $(f_{k\ell}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, dass $(f_{k\ell})$ kohomolog zu einem Kozykel im Bild von $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ ist, das bedeutet wegen der Definition von $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$, dass es einen Kozykel $(F_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ gibt, so dass

$$(F_{\tau(k),\tau(\ell)}) - (f_{k\ell}) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \tag{$\diamond$}$$

ist, wobei $\tau : K \to I$ eine Verfeinerungsabbildung ist (d.h. jeweils $V_k \subset U_{\tau(k)}$ gilt).

Sei $i \in I$ fest. Dann ist $(U_i \cap V_k)_{k\in K}$ eine offene Überdeckung von U_i, die wir kurz mit $U_i \cap \mathfrak{V}$ bezeichnen. Nach Voraussetzung ist $H^1(U_i, \mathscr{F}) = 0$ und deshalb auch $H^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathscr{F}) = 0$ nach Aussage 3.25. Also ist $(f_{k\ell}|_{U_i\cap V_k\cap V_\ell})_{k,\ell\in K} \in Z^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathscr{F}) = B^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathscr{F})$, d.h. es existieren Elemente $g_{i,k} \in \mathscr{F}(U_i \cap V_k)$ mit

$$f_{k\ell}|_{U_i\cap V_k\cap V_\ell} = g_{i,k} - g_{i,\ell} \quad \text{für } k, \ell \in K \ .$$

Sind nun $i, j \in I$ gegeben, so gilt für $k, \ell \in K$ auf $(U_i \cap U_j) \cap V_k \cap V_\ell$

$$g_{i,k} - g_{i,\ell} = f_{k\ell}|_{U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_\ell} = g_{j,k} - g_{j,\ell}$$

und somit

$$g_{j,\ell} - g_{i,\ell} = g_{j,k} - g_{i,k} \ .$$

Wegen dem Garbenaxiom (LG) (angewendet für die Überdeckung $(U_i \cap U_j) \cap \mathfrak{V}$ von $U_i \cap U_j$) existiert daher ein Schnitt $F_{i,j}\mathscr{F}(U_i \cap U_j)$, so dass für alle $k \in K$ gilt:

$$F_{i,j} = g_{j,k} - g_{i,k} \quad \text{auf } (U_i \cap U_j) \cap V_k \ .$$

Diese Gleichung zeigt auch, dass (F_{ij}) die Kozykel-Bedingung erfüllt, und deshalb gilt $(F_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.

Wir zeigen nun, dass mit dieser Wahl von (F_{ij}) die Bedingung $(\diamond)$ erfüllt ist. Dazu setzen wir $h_k = g_{\tau(k),k}|_{V_k} \in \mathscr{F}(V_k)$ für $k \in K$. Dann gilt für $k, \ell \in K$ auf $V_k \cap V_\ell$

$$F_{\tau(k),\tau(\ell)} - f_{k\ell} = (g_{\tau(\ell),k} - g_{\tau(k),k}) - (g_{\tau(\ell),k} - g_{\tau(\ell),\ell}) = g_{\tau(\ell),\ell} - g_{\tau(k),k} = h_\ell - h_k$$

und somit $(F_{\tau(k),\tau(\ell)} - f_{k,\ell})_{k,\ell\in K} = \delta^0((h_k)_{k\in K}) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$. □

Die folgende Aussage ist ein Beispiel für eine Anwendung des Satz von Leray:

3.28 Aussage. $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $U_1 = C^* \setminus \mathbb{R}^+$ und $U_2 = C^* \setminus \mathbb{R}^-$. Dann ist $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{C}^*$. Die U_i sind sternförmig, und deshalb einfach zusammenhängend. Nach Aussage 3.26(b) gilt deshalb $H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0$. Also ist $\mathfrak{U}$ eine Leray-Überdeckung für $(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$.

Jeder Kozykel $(f_{ij})_{i,j=1,2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ erfüllt wegen der Kozykelbedingung $f_{11} = f_{22} = 0$ und $f_{21} = -f_{12}$, ist also durch $f_{12} \in \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2)$ eindeutig bestimmt. Somit gilt $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2)$. Der Schnitt $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat zwei Zusammenhangskomponenten (nämlich $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $\{\mathrm{Im}(z) < 0\}$); in diesem Sinn ist $\mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Andererseits sind die U_i selbst zusammenhängend, und deshalb ist $C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Bezüglich dieser Isomorphismen wird der Randoperator $\delta^0 : C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \to B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ durch

$$\delta^0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ (b_1, b_2) \mapsto (b_2 - b_1, b_2 - b_1)$$

gegeben. Somit ist ein Element $(a_1, a_2) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ genau dann ein Korand, wenn $a_1 = a_2$ ist, d.h. $B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ ist isomorph zu $\Delta := \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Somit ist $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ isomorph zu $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\Delta \cong \mathbb{Z}$. □

3.29 Aufgabe. Show $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.