Kapitel 3

Garben und Kohomologie auf Riemannschen Flächen

Die primäre Literaturquelle für dieses Kapitel ist [Fo], Kapitel 2. Eine weitere gute Standard-Quelle, die allerdings die Garben-Sprache weniger verwendet, ist [FK], Chapter III.

3.1 Prägarben und Garben

3.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum mit Topologie (System der offenen Mengen) $\mathfrak{T}$. Eine *Prägarbe* [presheaf] von abelschen Gruppen auf X ist ein Paar $(\mathcal{F}, \rho)$ bestehend aus

(a) einer Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathfrak{T}}$ von abelschen Gruppen,

(b) einer Familie $\rho = (\rho_V^U)_{U,V \in \mathfrak{T}, V \subset U}$ von Gruppen-Homomorphismen

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) \quad \text{wann immer } U, V \in \mathfrak{T} \text{ mit } V \subset U \text{ ist,}$$

so dass die folgenden Bedingungen gelten:

$$\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)} \quad \text{für jedes } U \in \mathfrak{T},$$
$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U \quad \text{für } U, V, W \in \mathfrak{T} \text{ mit } W \subset V \subset U.$$

Meistens schreibt man nur $\mathcal{F}$ statt $(\mathcal{F}, \rho)$. Die Homomorphismen ρ_V^U heißen *Einschränkungs-homomorphismen* [restriction homomorphisms]. Für $f \in \mathcal{F}(U)$ schreibt man anstatt von $\rho_V^U(f)$ meistens $f|_V$. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ werden manchmal *Schnitte* [sections] von $\mathcal{F}$ genannt, die Elemente von $\mathcal{F}(X)$ *globale Schnitte* [global sections].

Entsprechend wie Prägarben von abelschen Gruppen kann man auch Prägarben von Mengen, Vektorräumen, Ringen usw. definieren.

3.2 Beispiele. (a) Sei X ein topologischer Raum mit Topologie $\mathfrak{T}$. Für $U \in \mathfrak{T}$ sei $\mathcal{C}(U)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, und für $U, V \in \mathfrak{T}$ mit $V \subset U$ sei

$$\rho_V^U : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V), \ f \mapsto f|_V .$$

Dann ist $(\mathcal{C}, \rho)$ eine Prägarbe von Ringen (oder Vektorräumen) auf X.

(b) Sei X eine Riemannsche Fläche mit Topologie $\mathfrak{T}$. Für $U \in \mathfrak{T}$ sei $\mathcal{O}(U)$ bzw. $\mathcal{M}(U)$ der Raum der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, und für $U, V \in \mathfrak{T}$ mit $V \subset U$ sei wieder $\rho^U_V : f \mapsto f|_V$. Dann sind $(\mathcal{O}, \rho)$ und $(\mathcal{M}, \rho)$ Prägarben von Ringen (genauer: von kommutativen Ringen mit Eins) auf X, genannt die *Garbe der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen auf* X.*

(Vorsicht: $\mathcal{M}$ ist *keine* Prägarbe von Körpern. Warum nicht?)

In analoger Weise kann man die Prägarbe $\mathcal{E}$ der glatten Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ definieren.

Wo es Prägarben gibt, gibt es bestimmt auch Garben. Die werden in der folgenden Definition eingeführt:

3.3 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt eine *Garbe* [sheaf], wenn für jede offene Menge $U \subset X$ und jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen in X mit $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ die folgenden *Garbenaxiome* [sheaf axioms] erfüllt sind:

(GL) Sind $f, g \in \mathcal{F}(U)$ und gilt $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$, so ist $f = g$.

(LG) Sind $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ gegeben, und gilt

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{für alle } i, j \in I, \tag{$*$}$$

so existiert ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Das in Teil (b) der Definition konstruierte f ist wegen Teil (a) der Definition eindeutig bestimmt. Außerdem zeigen (a) und (b) (angewendet mit $U = \varnothing$ und $I = \varnothing$), dass $\mathcal{F}(\varnothing)$ aus genau einem Element besteht.

3.4 Beispiele. (a) Die Prägarben $\mathcal{C}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$ aus Beispiel 3.2 sind offenbar sogar Garben.

(b) Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Für $\varnothing \neq U \subset X$ offen sei $\mathcal{G}(U)$ die Menge der lokal konstanten Funktionen $f : U \to G$ (d.h. f ist auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant). Außerdem sei $\mathcal{G}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Für $U, V \subset X$ offen mit $\varnothing \neq V \subset U$ sei $\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, $f \mapsto f|_V$ die übliche Restriktion; außerdem sei $\rho^U_\varnothing : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, $f \mapsto \varnothing$. Dann ist $(\mathcal{G}, \rho)$ eine Garbe, die *konstante Garbe* genannt und oft einfach mit G bezeichnet wird.

3.5 Aufgabe. Let X be a topological space and G an abelian group. For any open set $\varnothing \neq U \subset X$ let $\tilde{\mathcal{G}}(U)$ be the set of constant functions $f : U \to G$, also let $\tilde{\mathcal{G}}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Define the restriction operators ρ^U_V naturally. (Note the difference to Beispiel 3.4(b)!)

(a) Show that $(\tilde{G}, \rho)$ is a presheaf.

(b) Discuss whether $(\tilde{G}, \rho)$ is in fact a sheaf.

*Der Buchstabe $\mathcal{O}$ in der Bezeichnung der Garbe der holomorphen Funktionen steht vielleicht für den Namen des japanischen Mathematikers Kiyoshi Oka, der entscheidend zur Entwicklung der Kohomologietheorie für allgemeine komplexe Mannigfaltigkeiten beigetragen hat.

3.6 Aussage. Sei X ein topologischer Raum und $(\mathcal{F}, \rho)$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit Eins auf X. Für $U \subset X$ offen sei $\mathcal{F}^*(U)$ die (multiplikative) abelsche Gruppe der invertierbaren Elemente des kommutativen Rings $\mathcal{F}(U)$. Für $V \subset U \subset X$ offen und $f \in \mathcal{F}^*(U)$ ist $f|_V \in \mathcal{F}^*(V)$. Mit $\mathcal{F}^*$ und dieser Restriktion wird eine Garbe von abelschen Gruppen auf X definiert, die *Garbe der invertierbaren Elemente von* $\mathcal{F}$.

Beweis. Wir bezeichnen das Einselement (multiplikatives neutrales Element) des Rings $\mathcal{F}(U)$ mit 1_U. Sei $V \subset U \subset X$ offen. Weil die Restriktion $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ ein Homomorphismus von Ringen mit Eins ist, gilt $1_U|_V = 1_V$. Sei nun $f \in \mathcal{F}^*(U)$ gegeben. Nach Definition existiert also ein $g \in \mathcal{F}(U)$ mit $g \cdot f = 1_U$. Dann ist $g|_V \in \mathcal{F}(V)$ und es gilt

$$(g|_V) \cdot (f|_V) = (g \cdot f)|_V = 1_U|_V = 1_V \ .$$

Also ist $f|_V \in \mathcal{F}^*(V)$. Daher ist $\mathcal{F}^*$ mit der durch ρ gegebenen Restriktion eine Prägarbe.

Für $\mathcal{F}^*$ ist das Garbenaxiom (GL) offenbar erfüllt. Wir überprüfen, dass auch das Garbenaxiom (LG) gilt: Dazu seien offene Mengen $U, (U_i)_{i \in I}$ mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, sowie $f_i \in \mathcal{F}^*(U_i)$ gegeben, so dass die Bedingung $(*)$ in (LG) gilt. Insbesondere gilt $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Wegen dem Garbenaxiom (LG) für $\mathcal{F}$ existiert daher ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Es ist zu zeigen, dass $f \in \mathcal{F}^*(U)$ ist. Dazu: Weil f_i in $\mathcal{F}(U_i)$ invertierbar ist, existiert jeweils ein $g_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $g_i \cdot f_i = 1_{U_i}$. Für $i, j \in I$ gilt

$$\begin{aligned}(g_i)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_i)|_{U_i \cap U_j} = (g_i \cdot f_i)|_{U_i \cap U_j} = 1_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = 1_{U_i \cap U_j} = \ldots &= (g_j)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_j)|_{U_i \cap U_j} \\ &= (g_j)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_i)|_{U_i \cap U_j} \ .\end{aligned}$$

Weil $(f_i)|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}^*(U_i \cap U_j)$ ist, folgt $g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}$. Nach dem Garbenaxiom (LG) für $\mathcal{F}$ existiert daher ein $g \in \mathcal{F}(U)$ mit $g|_{U_i} = g_i$. Für jedes $i \in I$ ist $(g \cdot f)|_{U_i} = g_i \cdot f_i = 1_{U_i} = (1_U)|_{U_i}$, woraus mit dem Garbenaxiom (GL) für $\mathcal{F}$ folgt: $g \cdot f = 1_U$ und somit $f \in \mathcal{F}^*(U)$. □

3.2 Halme und Keime

Wir wollen nun den Begriff des „Keims“ einer Funktion in der Sprache von Garben formulieren.

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X und $a \in X$. Dann betrachten wir Paare (U, f) von offenen Umgebungen U von $a \in X$ und $f \in \mathcal{F}(U)$. Auf diesen Paaren führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein:

$$(U, f) \sim_a (V, g) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Umgebung } W \subset U \cap V \text{ von } a \text{ mit } f|_W = g|_W.$$

Die Äquivalenzklassen heißen *Keime* [germs] von $\mathcal{F}$ an der Stelle a. Die Menge der Keime an der Stelle $a \in X$ wird mit $\mathcal{F}_a$ bezeichnet und heißt *Halm* [stalk] von $\mathcal{F}$ bei a. Jeder Halm ist offenbar wieder eine abelsche Gruppe. Wir schreiben auch f_a anstelle von $[(U, f)]_a$.

3.7 Beispiel. Sei X eine Riemannsche Fläche und $a \in X$. Wegen der „Starrheit“ von holomorphen Funktionen (Identitätssatz) ist eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer Umgebung U von a in X schon durch die Werte von f und allen Ableitungen an der Stelle a, d.h. durch die Taylorreihe von f in a bestimmt. Das bedeutet, dass der Keim von f isomorph zur Taylorreihe von f in a ist. Deshalb ist der Halm $\mathcal{O}_a$ der Keime von in a holomorphen Funktionen isomorph zum Ring $\mathbb{C}\{z-a\}$ der konvergenten (d.h. mit positivem Konvergenzradius) Potenzreihen in der Variable $z-a$ mit komplexen Koeffizienten.

In analoger Weise ist der Halm $\mathcal{M}_a$ der Keime in a meromorpher Funktionen isomorph zum Ring der Laurentreihen mit endlichem Hauptteil und (mit positivem Konvergenzradius) konvergentem Nebenteil

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k\,(z-a)^k \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}\,,\ c_k \in \mathbb{C}\,.$$

3.3 Homomorphismen von Garben

Zu algebraischen oder analytischen Strukturen gehören immer auch die passenden Homomorphismen. Für Prägarben gibt es hier keine Schwierigkeiten, die zugehörigen Homomorphismen werden auf geradlinige Weise mit der folgenden Definition eingeführt:

3.8 Definition. Sei X ein topologischer Raum, und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Prägarben von abelschen Gruppen auf X. Dann ist ein *Homomorphismus von Prägarben* [presheaf homomorphism] $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine Familie (f_U) von Gruppenhomomorphismen $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ (wobei U die offenen Teilmengen von X durchläuft), so dass für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ das folgende Diagramm jeweils kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V). \end{array}$$

Offenbar ist die Identität ein Homomorphismus von Prägarben. Das Bild bzw. der Kern eines Homomorphismus von Prägarben ist offenbar wieder eine Prägarbe. Eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von Homomorphismen von Prägarben heißt *exakt*, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ die entsprechende Sequenz von Homomorphismen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ exakt ist, d.h. dass der Kern des zweiten Homomorphismuses gleich dem Bild des ersten ist.

3.9 Aussage. (a) Sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ eine Folge von Homomorphismen von Prägarben. Wenn jede Umgebung U eines Punktes $a \in X$ eine offene Umgebung $V \subset X$ enthält, so dass $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V) \to \mathcal{H}(V)$ exakt ist, dann ist auch $\mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a \to \mathcal{H}_a$ exakt.

(b) Wenn $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ eine exakte Sequenz von Prägarbenhomomorphismen ist, dann ist für alle $a \in X$ die Sequenz $\mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a \to \mathcal{H}_a$ exakt.

3.10 Bemerkung. Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ eine Unterprägarbe der Garbe $\mathcal{G}$. Dann gibt es eine kleinste Untergarbe $\tilde{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{G}$ der Garbe $\mathcal{G}$, die $\mathcal{F}$ enthält. Für einen beliebigen Punkt $a \in X$ ist die entsprechende Abbildung $\mathcal{F}_a \to \tilde{\mathcal{F}}_a$ ein Isomorphismus. Wir definieren $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ dabei so, dass es alle Elemente $f \in \mathcal{G}(U)$ enthält, für die es eine Überdeckung $U = \bigcup \mathcal{U}$ gibt mit $f|_V \in \mathcal{F}(V)$ für alle $V \in \mathcal{U}$. Dann liegt f offenbar für alle $a \in U$ im Bild von $\mathcal{F}_a \to \tilde{\mathcal{F}}_a$.

3.11 Definition. Sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben. Dann ist die Bildgarbe definiert als die kleinste Untergarbe von $\mathcal{G}$, die das Bild enthält.