

2.24 Definition. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *Dirichlet-Gebiet*, wenn das Dirichlet-Problem für jede stetige Randfunktion auf ∂G eindeutig lösbar ist, d.h. wenn es für jede stetige Funktion $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ genau eine stetige Funktion $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f|_G$ harmonisch ist und $f|_{\partial G} = g$ gilt.

Wir haben schon in Satz 2.9 gesehen, dass alle offenen Bälle $B(z_0, r)$ Dirichlet-Gebiete sind. Wir werden jetzt gleich sehen, dass alle beschränkten Gebiete mit hinreichend guten Rändern Dirichlet-Gebiete sind.

2.25 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $z_0 \in \partial G$. Eine *Barriere* [barrier] für G in z_0 ist eine Familie $\{\psi_r \mid r > 0\}$ von reellen Funktionen ψ_r mit folgenden Eigenschaften:

- (i) ψ_r ist auf $G \cap B(z_0, r)$ superharmonisch mit $0 \leq \psi_r \leq 1$.
- (ii) ψ_r läßt sich stetig auf dem Abschluss von $G \cap B(z_0, r)$ in \mathbb{C} fortsetzen. Diese Fortsetzung verschwindet bei z_0 , und ist auf $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$ gleich 1.

2.26 Satz. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Dirichlet-Gebiet, wenn jeder Randpunkt von G eine Barriere hat.

Beweis. Es sei zunächst G ein Dirichlet-Gebiet. Zu vorgegebenem $z_0 \in \partial G$ ist $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \frac{|z-z_0|}{1+|z-z_0|}$ eine stetige Funktion mit $0 \leq g \leq 1$, die nur bei z_0 verschwindet. Weil G ein Dirichlet-Gebiet ist, existiert genau eine Lösung des Dirichlet-Problems zu g , d.h. genau eine stetige Funktion $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f|_G$ harmonisch ist, und $f|_{\partial G} = g$ gilt. Weil f sein Maximum und sein Minimum auf ∂G annimmt, ist $0 \leq f \leq 1$. Für $r > 0$ sei $c_r \geq 0$ der minimale Funktionswert, der von f auf der kompakten Menge $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$ angenommen wird. Wenn $c_r = 0$ wäre, so würde dieses Minimum in einem Punkt in G angenommen, und deshalb wäre f dann nach dem Maximumprinzip Aussage 2.6(a) konstant. Also ist $c_r > 0$. Die Funktion $\psi_r := \frac{1}{c_r} \min\{f, c_r\}$ ist nach Korollar 2.17 (bzw. der analogen Aussage für superharmonische Funktionen) auf $G \cap B(z_0, r)$ superharmonisch, es gilt $0 \leq \psi_r \leq 1$, $\psi_r(z_0) = 0$ und $\psi_r|_{\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)} = 1$. Also ist $\{\psi_r \mid r > 0\}$ eine Barriere für G in z_0 .

Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass das Gebiet G an jedem Randpunkt eine Barriere besitzt. Dann sei eine stetige Funktion $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Nach dem Satz 2.20 über die Methode von Perron ist die Funktion

$$f : G \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sup\{h(z) \mid h \in \mathcal{P}(G, g)\}$$

harmonisch. Wir werden zeigen, dass f stetig auf \bar{G} fortgesetzt werden kann und dann $f|_{\partial G} = g$ gilt. Damit ist f dann eine Lösung des Dirichlet-Problems zu g . Wegen Aussage 2.6(b) ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Sei dafür $z_0 \in \partial G$ und $\{\psi_r \mid r > 0\}$ eine Barriere für G in z_0 . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g(z_0) = 0$ annehmen. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so gewählt, dass $|g(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in B(z_0, 2\delta) \cap \partial G$ gilt. Dann definieren wir $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_\delta(z) & \text{für } z \in G \cap \overline{B(z_0, \delta)} \\ 1 & \text{für } z \in G \setminus B(z_0, \delta) \end{cases}.$$

Offenbar ist ψ superharmonisch und es gilt $\psi \geq 0$. Sei $M > 0$ das Maximum von $|g|$ auf ∂G . Wir zeigen nun

$$-M\psi - \varepsilon \leq f \leq M\psi + \varepsilon.$$

Die linke Ungleichung folgt aus $-M\psi - \varepsilon \in \mathcal{P}(G, g)$, was der Fall ist, denn $-M\psi - \varepsilon$ ist subharmonisch, es gilt für $z \in \partial G \cap B(z_0, \delta)$

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq -\varepsilon < g(z)$$

und für $z \in \partial G \setminus B(z_0, \delta)$ gilt $\psi(z) = 1$ und deshalb

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq -M \leq g(z).$$

Andererseits ist jedes $h \in \mathcal{P}(G, g)$ auf ∂G durch $g \leq M\psi + \varepsilon$ nach oben beschränkt. Weil h subharmonisch und $M\psi + \varepsilon$ superharmonisch ist, folgt $h \leq M\psi + \varepsilon$ auf ganz G nach Aussage 2.14(b). Durch Bildung des Supremums über alle $h \in \mathcal{P}(G, g)$ folgt heraus die rechte Ungleichung.

Die obige Ungleichung zeigt wegen $\psi(z_0) = 0$: $-\varepsilon \leq f(z_0) \leq \varepsilon$. Indem man nun $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen lässt, folgt $f(z_0) = 0 = g(z_0)$, was zu zeigen war.

Der Nutzen der Barriere bei diesem Beweis bestand darin, die Funktion ψ zu konstruieren, mit deren Hilfe wir f „einklemmen“ konnten. \square

Wegen des vorhergehenden Satzes ist es extrem interessant, wenn man weiß, dass bei einem bestimmten Gebiet jeder Randpunkt eine Barriere besitzt. Das folgende Lemma liefert hierfür ein (hinreichendes) Kriterium. Es zeigt, dass die Voraussetzung von Satz 2.26 für jedes beschränkte Gebiet in \mathbb{C} , dessen Rand „hinreichend gutartig“ ist, erfüllt ist.

2.27 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $z_0 \in \partial G$. Wenn es ein $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \bar{G}$ gibt, so dass für die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1] = \{z_0 + t(z_1 - z_0) \mid t \in [0, 1]\}$ gilt: $[z_0, z_1] \cap \bar{G} = \{z_0\}$, dann besitzt G bei z_0 eine Barriere.

Beweis. Sind $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ zwei beschränkte Gebiete, $\varphi: \bar{G}_1 \rightarrow \bar{G}_2$ biholomorph, und $z_0 \in \partial G_1$. Dann besitzt G_1 genau dann eine Barriere in z_0 , wenn G_2 eine Barriere in $\varphi(z_0)$ besitzt. Diese Aussage verwenden wir, indem wir zu $G_1 = G$ unter der genannten Voraussetzung eine biholomorphe Abbildung auf die Einheitskreisscheibe $G_2 = \mathbb{D}$ konstruieren. Da letztere ein Dirichlet-Gebiet ist, besitzt nach Satz 2.26 jeder Randpunkt von \mathbb{D} eine Barriere. Daher folgt dann, dass G bei z_0 eine Barriere besitzt.

Die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-z_0}{z-z_1}$ bildet die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1]$ auf \mathbb{R}_0^- ab, denn für $t \in \mathbb{R}^-$ gilt

$$\frac{z-z_0}{z-z_1} = -t \iff z(1+t) = z_0 + z_1 t \iff z = z_0 + \frac{t}{1+t}(z_1 - z_0).$$

Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ist einfach zusammenhängend, und besitzt den Zweig der Quadratwurzelfunktion

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}, \quad z \mapsto \sqrt{z},$$

die mit diesem Definitionsbereich biholomorph ist. Das Bild wird durch die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ auf \mathbb{D} abgebildet. Dabei wird der Randpunkt z_0 auf $-1 \in \partial \mathbb{D}$ abgebildet. Nach dem anfangs Gesagten folgt, dass G in z_0 eine Barriere hat. \square

Jetzt können wir auch das Dirichletproblem auf beliebigen Riemannschen Flächen mit kompaktem Rand lösen.

2.28 Theorem. Sei X eine Riemannsche Fläche mit kompaktem Rand ∂X , und $f : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g|_{X^\circ}$ harmonisch ist, und $g|_{\partial X} = f$ gilt.

Beweis. Wir wollen die Perron-Methode verwenden, um die gesuchte Funktion zu konstruieren. Weil X im Allgemeinen nicht kompakt ist, sind stetige Funktionen auf X nicht unbedingt beschränkt. Aus diesem Grund müssen wir die Definition der Perron-Familie für diesen Fall modifizieren: Die *modifizierte Perron-Familie* $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$ besteht aus allen stetigen Funktionen $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g|_{X^\circ}$ subharmonisch ist, für alle $x_0 \in \partial X$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq f(x_0)$$

gilt, und die $g \leq \max_{x \in \partial X} f(x) \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Wegen Korollar 2.17 ist das Maximum von endlich vielen Elementen von $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$ wieder in $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$, und die in Lemma 2.21 aus einem $f \in \tilde{\mathcal{P}}(X, f)$ konstruierten Funktion h ist wieder in $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$. Deshalb übertragen sich die Argumente aus den Beweisen der Sätze 2.20 und 2.26 auf die vorliegende Situation.

Ist $x_0 \in \partial X$, so existiert eine Karte (U, z) von X mit $z(x_0) = 0$, $\operatorname{Im}(z(x)) = 0$ für alle $x \in \partial X \cap U$ und $\operatorname{Im}(z(x)) > 0$ für alle $x \in X^\circ \cap U$. Daher erfüllt $G := z[U^\circ]$ die Bedingung von Lemma 2.27 mit $z_0 = 0$ und $z_1 = -i$. Nach diesem Lemma besitzt G eine Barriere in $z_0 = z(x_0)$, und daher besitzt X eine Barriere in x_0 .

Daher ist nach (der auf die vorliegende Situation übertragenen Version von) Satz 2.26 das Dirichlet-Problem auf X zu f eindeutig lösbar. \square

2.7 Der Anulus-Satz

Ein wichtiger Teilschritt auf dem Weg zum großen Riemannschen Abbildungssatz ist der Anulus-Satz, den wir in diesem Abschnitt vorstellen und beweisen. Er zeigt, dass eine einfach zusammenhängende (bzw. planare, vgl. Definition 2.29) Riemannsche Fläche, aus der man zwei abgeschlossene Bälle „herausgeschnitten“ hat, zu einem Kreisring in \mathbb{C} biholomorph ist.

Die folgende Definition hat provisorischen Charakter, d.h. sie erfolgt nur, um den Beweis des großen Riemannschen Abbildungssatz besser zu organisieren. Am Ende wird sich herausstellen, dass eine Riemannsche Fläche genau dann planar ist, wenn sie einfach zusammenhängend ist.

2.29 Definition. Eine Riemannsche Fläche X (ohne Rand) heißt *planar* [planar], wenn jede geschlossene 1-Form auf X mit kompaktem Träger exakt ist.

2.30 Satz. (Anulus-Satz) Sei X eine kompakte, planare Riemannsche Fläche, $D \subset X$ eine offene Teilmenge, die zu \mathbb{D} biholomorph äquivalent ist, und $A, B \subset D \cong \mathbb{D}$ zwei abgeschlossene Kreisscheiben. Dann existiert ein $R > 1$, so dass die Riemannsche Fläche $X \setminus (A \cup B)$ zum Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$$

biholomorph äquivalent ist.

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Vorbereitung. In der Situation von Satz 2.30 identifizieren wir D mit \mathbb{D} und bezeichnen die Mittelpunkte der Kreisscheiben A bzw. B mit $a, b \in \mathbb{D} \simeq D$. Wir bezeichnen mit A_ε und B_ε die abgeschlossenen Bälle um a und b mit Radius ε , und mit X_ε die Riemannsche Fläche $X \setminus (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)$. Hierbei sei ε klein genug, so dass sich A_ε und B_ε nicht schneiden. C sei die geschlossene Kurve $\partial B(a, r)$; dabei sei einerseits $r > \varepsilon$, andererseits sei r klein genug, dass sich auch $\overline{B(a, r)}$ und $\overline{B(b, \varepsilon)}$ nicht schneiden.

2.31 Lemma. In der zuvor beschriebenen Situation gilt für jede glatte, geschlossene 1-Form ω auf X_ε : Wenn $\int_C \omega \in \mathbb{Z}$ ist, so ist auch $\int_\gamma \omega \in \mathbb{Z}$ für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede geschlossene 1-Form ω auf X_ε , die $\int_C \omega = 0$ erfüllt, exakt ist. Weil ω geschlossen ist, verschwindet für kleine $t > 0$ das Flächenintegral von $d\omega$ auf der zwischen C und $\partial A_{\varepsilon+t}$ eingeschlossenen Fläche F , sowie auf der zwischen C und $\partial B_{\varepsilon+t}$ eingeschlossenen Fläche. Mit dem Satz von Stokes (Satz 1.20) folgt hieraus $\int_{\partial A_{\varepsilon+t}} \omega = \int_C \omega + \int_F d\omega = 0$ und entsprechend $\int_{\partial B_{\varepsilon+t}} \omega = 0$. Also gibt es glatte Funktionen φ und ψ , die außerhalb von $A_{\varepsilon+t}$ bzw. $B_{\varepsilon+t}$ verschwinden, so dass $\omega - d\varphi - d\psi$ in einer Umgebung von ∂A_ε und ∂B_ε verschwindet. Daher lässt sich $\omega - d\varphi - d\psi$ zu einer geschlossenen 1-Form auf X fortsetzen; ihr Träger ist in $\bar{A}_\varepsilon \cup \bar{B}_\varepsilon$ enthalten und deshalb kompakt. Weil X planar ist, folgt, dass $\omega - d\varphi - d\psi$ exakt ist. Also ist auch ω auf X_ε exakt.

Als nächstes zeigen wir, dass es eine geschlossene Form Ω auf X_ε gibt, so dass $\int_C \Omega = 1$ und $\int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}$ für alle geschlossenen Wege $\gamma \in X_\varepsilon$ gilt. Dazu definieren wir zunächst

$$\Omega' = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{dz}{z-b} - \frac{dz}{z-a} \right) \text{ auf } \mathbb{D} \setminus \{a, b\}.$$

Dann gilt $\int_C \Omega' = 1$ mit der entsprechenden Orientierung von C und $\int_{\partial B(0,t)} \Omega' = 0$ für $t < 1$ aber dicht bei 1. Also gibt es eine glatte Funktion ζ auf X , so dass $\Omega' - d\zeta$ auf einer Umgebung von $\partial B(0, 1)$ verschwindet. Dann ist die Fortsetzung von $\Omega' - d\zeta$ auf X , die auf D verschwindet, exakt. Also gibt es eine geschlossene Form Ω auf X_ε , die auf $D \setminus \{a, b\}$ mit Ω' übereinstimmt, und auf $X \setminus \bar{D}$ exakt ist. Jeder geschlossene Weg von X_ε lässt sich zerlegen in geschlossene Wege in $B(0, t) \subset D$ mit $t < 1$ aber dicht bei t und geschlossene Wege in $X \setminus \bar{D}$. Dann folgt die Behauptung.

Nun betrachten wir eine geschlossene 1-Form ω auf X_ε , die $\int_C \omega \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Dann ist $\omega' = \omega - (\int_C \omega) \Omega$ eine geschlossene 1-Form auf X_ε , die $\int_C \omega' = 0$ erfüllt. Wegen dem ersten Beweisschritt ist ω' also exakt. Damit folgt für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε :

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega' + \int_C \omega \int_\gamma \Omega = \int_C \omega \int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}.$$

□

Beim Beweis des Anulus-Satz verwenden wir weiter den sogenannten *Hodge*-Operator* [Hodge star operator] für 1-Formen. Er ist dadurch definiert, dass bezüglich beliebiger holomorpher Karten z und glatter Funktionen $f(z)$, $g(z)$ gilt:

$$*(f(z) dz + g(z) d\bar{z}) = -i f(z) dz + i g(z) d\bar{z}.$$

Man überprüft leicht:

2.32 Aufgabe. Sei X eine Riemannsche Fläche.

- (a) Durch $*$ wird ein wohldefinierter (koordinatenunabhängiger) linearer Operator auf dem Raum der glatten 1-Formen auf X definiert.
- (b) Eine zweimal differenzierbare Funktion $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn $*dh$ geschlossen ist, also $d * dh = 0$ gilt.
- (c) Ist $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so ist jede Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, die $df = dh + i * dh$ erfüllt, holomorph.
- (d) Ist $G \subset \mathbb{C}$ und ω eine reelle 1-Form (d.h. $\omega = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ mit reellwertigen Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$), so ist $\omega \wedge * \omega$ punktweise ein nicht-negatives, reelles Vielfaches der „Standardorientierung von \mathbb{C} “, d.h. der 2-Form $dx \wedge dy$. Außerdem hat $\omega \wedge * \omega$ nur an den Nullstellen von ω Nullstellen.

Beweis des Anulus-Satzes (Satz 2.30). Die Riemannsche Fläche mit Rand \bar{X}_ε hat kompakten Rand $\partial X_\varepsilon = \partial A_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon$. Nach Theorem 2.28 besitzen deshalb Dirichlet-Probleme auf \bar{X}_ε eindeutige Lösungen. Für $c > 0$ sei $h_c : \bar{X}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Dirichlet-Problems zur stetigen Randfunktion $h_c : \partial A_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_c|_{\partial A_\varepsilon} = c$ und $h_c|_{\partial B_\varepsilon} = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieses Dirichlet-Problems gilt jeweils $h_c = c \cdot h_1$. Weil h_c harmonisch ist, wegen des Satzes von Stokes (Satz 1.20), und weil ∂A_ε in \bar{X}_ε homotop zu C ist, gilt

$$\int_{X_\varepsilon} dh_c \wedge *dh_c = \int_{X_\varepsilon} d(h_c \cdot *dh_c) = \int_{\partial A_\varepsilon} h_c \cdot *dh_c + \int_{\partial B_\varepsilon} h_c \cdot *dh_c = c \cdot \int_{\partial A_\varepsilon} *dh_c = c \cdot \int_C *dh_c.$$

Wegen Aufgabe 2.32(d) ist $\int_{X_\varepsilon} dh_c \wedge *dh_c > 0$. Deshalb folgt, dass es genau ein $c > 0$ gibt, so dass $\int_C *dh_c = 1$ ist. Weil $*dh_c$ nach Aufgabe 2.32(b) geschlossen ist, folgt aus Lemma 2.31, dass $\int_\gamma *dh_c \in \mathbb{Z}$ für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε gilt. Deshalb ist für fixiertes $x_0 \in X_\varepsilon$ und beliebiges $x \in X_\varepsilon$ der Wert

$$f(x) = \exp\left(2\pi \int_{x_0}^x (dh_c + i * dh_c)\right) \cdot \exp(2\pi h_c(x_0))$$

unabhängig von der Wahl des Integrationswegs in X_ε von x_0 nach x , so dass hierdurch eine Funktion $f : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wird. Nach Aufgabe 2.32(c) ist der Integrand $dh_c + i * dh_c$ holomorph, und deshalb ist auch f holomorph. Wegen der Formel $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ gilt für jedes $x \in X_\varepsilon$: $|f(x)| = \exp(2\pi h_c(x))$. Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen, angewendet auf die harmonische Funktion h_c , ist $0 < h_c < c$ auf X_ε (die strengen Ungleichungen gelten, weil h_c sonst konstant wäre), und somit ist das Bild von f im Anulus

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \exp(2\pi c)\}$$

enthalten. Und zwar ist das Bild $f[X_\varepsilon]$ einerseits nach dem Satz vom offenen Bild eine offene Teilmenge von M ; andererseits ist \bar{X}_ε kompakt, und deshalb ist $\bar{f[X_\varepsilon]} = f[\bar{X}_\varepsilon]$ eine kompakte Teilmenge von \bar{M} . Deshalb ist $f[X_\varepsilon] = f[\bar{X}_\varepsilon] \cap M$ auch abgeschlossen in M . Weil M zusammenhängend ist, folgt hieraus $f[X_\varepsilon] = M$.

Es verbleibt zu zeigen, dass f injektiv ist; nach dem Satz von Osgood ist dann $f : X_\varepsilon \rightarrow M$ biholomorph. Wir benutzen dazu, dass nicht-konstante holomorphe Abbildungen „verzweigte Überlagerungen“ sind, d.h. dass es eine diskrete Menge $N \subset X_\varepsilon$ gibt, so dass $f|_{(X_\varepsilon \setminus N)}$ eine holomorphe Überlagerung ist, und dass an den „Verzweigungspunkten“, d.h. den Punkten von N die Fasern von f höchstens so viele Punkte enthalten wie die Blätterzahl der Überlagerung angibt. Deshalb ist

$$\int_{\bar{X}_\varepsilon} f^*(dz \wedge d\bar{z}) = \deg(f) \cdot \int_M dz \wedge d\bar{z}, \quad (*)$$

wobei $\deg(f) \in \mathbb{N}$ auch der „Abbildungsgrad“ von f heißt. Aus dem zuvor gesagten folgt: Wenn $\deg(f) = \pm 1$ ist, so ist f injektiv. Um $\deg(f)$ zu bestimmen, sollten wir also die beiden Integrale in (*) ausrechnen.

Auf der einen Seite gilt

$$\int_M dz \wedge d\bar{z} = -2i \cdot \int_M dx \wedge dy = -2i \cdot \text{vol}(M) = -2i \cdot \pi(\exp(4\pi c) - 1).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f^*(dz \wedge d\bar{z}) &= df \wedge d\bar{f} = |f|^2 \cdot \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = \exp(4\pi h_c) \cdot (2\pi(dh_c + i * dh_c)) \wedge (2\pi(dh_c - i * dh_c)) \\ &= \exp(4\pi h_c) \cdot 4\pi^2 \cdot (-2i) \cdot (dh_c \wedge *dh_c) = -2\pi i \cdot d(\exp(4\pi h_c)) \wedge *dh_c \\ &= -2\pi i \cdot d(\exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c) \end{aligned}$$

und somit nach dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{X}_\varepsilon} f^*(dz \wedge d\bar{z}) &= -2\pi i \int_{\bar{X}_\varepsilon} d(\exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c) = -2\pi i \int_{\partial \bar{X}_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c \\ &= -2\pi i \cdot \left(\int_{\partial A_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c - \int_{\partial B_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c \right) \\ &= -2\pi i \cdot \left(\exp(4\pi c) \int_{\partial A_\varepsilon} *dh_c - \int_{\partial B_\varepsilon} *dh_c \right) \\ &= -2\pi i \cdot (\exp(4\pi c) - 1). \end{aligned}$$

Durch Vergleich der beiden Rechenergebnisse in (*) ergibt sich $\deg(f) = 1$ und damit die Injektivität von f . \square

2.33 Korollar. Sei X eine Riemannsche Fläche mit Rand, die als topologischer Raum homöomorph zu $S^1 \times [0, 1]$ ist. Dann gibt es ein $R > 1$, so dass das Innere $X^\circ \cong S^1 \times (0, 1)$ biholomorph ist zum Anulus

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}.$$

Beweis. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ ist isomorph zu \mathbb{Z} , und ein Erzeuger von $\pi_1(X)$ ist die Homotopieklasse der geschlossenen Kurve $C : S^1 \rightarrow X \cong S^1 \times [0, 1]$, $\varphi \mapsto (\varphi, 0)$. Daher hat X mit dieser Kurve C sinngemäß die Eigenschaft von Lemma 2.31. Der Beweis des Anulus-Satzes überträgt sich nun auf die gegenwärtige Situation. \square