Kapitel 2

Uniformisierung

In diesem Kapitel wollen wir den *Uniformisierungssatz* beweisen, der die Riemannschen Flächen bis auf Biholomorphie klassifiziert. Eine wesentliche Etappe hierzu ist der *große Riemannsche Abbildungssatz*, der besagt, dass jede *einfach zusammenhängende* Riemannsche Fläche entweder zu $\mathbb{C}$, oder zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zu $\mathbb{D} := B(0,1) \subset \mathbb{C}$ biholomorph äquivalent ist.

Um den großen Riemannschen Abbildungssatz zu zeigen, werden wir auf jeder beliebigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche X eine injektive, meromorphe Funktion konstruieren. Dies werden wir mittels monotonen Grenzwerten von (sub)harmonischen Funktionen tun. Daher befassen wir uns als erstes mit harmonischen Funktionen auf Riemannschen Flächen. Dies sind lokal die Realteile von holomorphen Funktionen.

2.1 Harmonische Funktionen

2.1 Aussage und Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche und $u : X \to \mathbb{R}$ eine glatte, reellwertige Funktion auf X. Für u sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathrm{d}'\mathrm{d}''u = -\mathrm{d}''\mathrm{d}'u = 0$.

(ii) $\mathrm{d}'u$ ist eine holomorphe 1-Form vom Typ (1,0) auf X.

(iii) Für jede Karte (U, z) von X gilt mit $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ die *Laplacesche Differentialgleichung*

$$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

(iv) Es gibt eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X, so dass $u|_{U_\alpha}$ jeweils Realteil einer holomorphen Funktion $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ ist. f_α ist jeweils bis auf Addition einer rein-imaginären Konstanten eindeutig bestimmt.

Gilt eine – und damit jede – dieser äquivalenten Aussagen, so heißt u *harmonisch* [harmonic]. Den reellen Vektorraum der harmonischen Funktionen auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(X)$. Die holomorphe 1-Form $\mathrm{d}'u$ betrachten wir als die Ableitung von $u \in \mathcal{H}(X)$; in der Situation von (iv) gilt jeweils $\mathrm{d}'u|_{U_\alpha} = \mathrm{d}f_\alpha$. In lokalen Koordinaten gilt $\mathrm{d}'u = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}z$.

2.2 Aufgabe. (a) $u := \log|z| \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ with $\mathrm{d}'u = \frac{1}{z}\mathrm{d}z$.

(b) For a Riemann surface X and a holomorphic function $f \in \mathcal{O}(X)$ without zeros, we have $u := \log|f| \in \mathcal{H}(X)$ and $\mathrm{d}'u = f^{-1}\,\mathrm{d}f$. For this reason $f^{-1}\,\mathrm{d}f$ is called the *logarithmic derivative* of f.

Beweis von Aussage 2.1. In (i) beachten wir zunächst, dass in jedem Fall $0 = \mathrm{dd}u = (\mathrm{d}' + \mathrm{d}'')(\mathrm{d}' + \mathrm{d}'')u = \mathrm{d}'\mathrm{d}''u + \mathrm{d}''\mathrm{d}'u$ und damit $\mathrm{d}'\mathrm{d}''u = -\mathrm{d}''\mathrm{d}'u$ gilt. $\omega := \mathrm{d}'u$ ist in jedem Fall eine 1-Form vom Typ (1,0). Diese ist genau dann holomorph, wenn $0 = \mathrm{d}''\omega = \mathrm{d}''\mathrm{d}'u$ gilt. Damit ist die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) gezeigt. Bezüglich einer lokalen Karte wie in (iii) gilt $\omega = \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z$ und daher

$$\mathrm{d}''\omega = -\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar z}(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z)\,.$$

Das gibt die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Für die Äquivalenz (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) verwenden wir, dass wir X durch Kartenumgebungen überdecken können, deren Bild unter der Kartenabbildung jeweils ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Aus diesem Grund können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass u auf einem konvexen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definiert ist. Ist u harmonisch, so gilt für die Funktion $g := \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$

$$\tfrac{\partial g}{\partial \bar z} = \tfrac{1}{4}(\tfrac{\partial}{\partial x} + i\tfrac{\partial}{\partial y})(u_x - iu_y) = \tfrac{1}{4}(u_{xx} - iu_{xy} + iu_{yx} + u_{yy}) = 0\,.$$

Also ist g holomorph, und besitzt daher eine holomorphe Stammfunktion f auf dem konvexen Gebiet G. Die Integrationskonstante können wir dabei so wählen, dass $\mathrm{Re}\,f(z_0) = u(z_0)$ an einer Stelle $z_0 \in G$ gilt. Nun ist $(f-u)_z = g - u_z = g - \frac{1}{2}(u_x - iu_y) = -i \cdot \frac{1}{2}u_y$ rein-imaginär, deshalb ist $\mathrm{Re}\,f = u$. Ist umgekehrt u der Realteil einer holomorphen Funktion $f = u + iv$, so gilt wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x - (v_x)_y = 0\,,$$

und somit ist u dann harmonisch. □

2.3 Aufgabe. Let X, Y be Riemann surfaces, $f : X \to Y$ a holomorphic map, and $u \in \mathcal{H}(Y)$. Then $u \circ f \in \mathcal{H}(X)$.

Dadurch, dass harmonische Funktionen lokal Realteile von holomorphen Funktionen sind, übertragen sich gewisse Eigenschaften holomorpher Funktionen auf diese.

2.4 Aufgabe. Formulate and prove a version of the identity theorem for harmonic functions on Riemann surfaces.

Die folgende Mittelwerteigenschaft, die wir zunächst nur für harmonische Funktionen auf Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ formulieren, ergibt sich aus der Cauchyschen Integralformel:

2.5 Aussage. (Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen) Sei $0 < r' < r$ und $u \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$. Dann ist $u(z_0)$ gleich dem Mittelwert der Werte von u auf dem Kreis $\{|z - z_0| = r'\} = \partial B(z_0, r')$, explizit:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + r' \cdot e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $z_0 = 0$ annehmen. Weil $B(0,r)$ ein konvexes Gebiet ist, existiert eine holomorphe Funktion $f : B(0,r) \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f) = u$, siehe den Beweis von Aussage 2.1. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(r'\cdot e^{i\varphi})}{r'\cdot e^{i\varphi}}\cdot ir'e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r'\cdot e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi$$

und somit

$$u(0) = \mathrm{Re}(f(0)) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r'\cdot e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}(f(r'\cdot e^{i\varphi}))\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r'\cdot e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

□

2.6 Aussage. (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) Sei X eine Riemannsche Fläche und u eine harmonische Funktion auf X.

(a) Wenn u in einem $x_0 \in X$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum annimmt, so ist u konstant.

(b) Ist $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge, so nimmt $u|_K$ sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand von K an.

Beweis. Zu (a): u habe in $x_0 \in X$ ein lokales Maximum. Es sei (U,z) eine Karte von X mit $x_0 \in U$ und $z(x_0) = 0$. Dann wählen wir $r > 0$ mit $B(0,r) \subset z[U]$ und so, dass $u|_{z^{-1}[B(0,r)]} \leq u(x_0)$ ist. Nach Aufgabe 2.3 ist $\tilde{u} = u(x_0) - (u \circ z^{-1})|_{B(0,r)}$ eine harmonische Funktion auf $B(0,r)$. Für $0 < r' < r$ gilt dann nach der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen, Aussage 2.5

$$0 = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(r'\cdot e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Weil der Integrand $\tilde{u}$ nicht-negativ ist, folgt hieraus, dass $\tilde{u}$ auf $K_{r'}(0)$ verschwindet. Das zeigt, dass u auf $z^{-1}[B(0,r)]$ konstant gleich $u(x_0)$ ist. Mit dem Identitätssatz für harmonische Funktionen, Aufgabe 2.4, folgt, dass u überhaupt konstant ist. (b) folgt sofort aus (a). □

2.2 Das Dirichlet-Problem für Kreisscheiben

2.7 Definition. Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ oder eine „berandete Riemannsche Fläche“, und $g : \partial G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Die Suche nach einer stetigen reellwertigen Funktion $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $u|_G$ ist harmonisch,

(ii) $u|_{\partial G} = g$

heißt *Dirichlet-Problem.*

In diesem Abschnitt werden wir das Dirichlet-Problem zunächst für offene Kreisscheiben $B(z_0, r)$ in $\mathbb{C}$ diskutieren. Es wird sich zeigen, dass es in diesem Fall für jede beliebige stetige Randfunktion g eindeutig lösbar ist. Weil eine offene Kreisscheibe $B(z_0, r)$ durch die Möbius-Transformation $z \mapsto \frac{z-z_0}{r}$ auf die offene Kreisscheibe $\mathbb{D} := B(0,1)$ abgebildet wird, genügt es, $\mathbb{D}$ zu betrachten. Später werden wir das Dirichlet-Problem für allgemeine Riemannsche Flächen untersuchen.

Der Schlüssel für die Lösung des Dirichlet-Problems auf Kreisscheiben ist die Poissonsche Darstellungsformel. Sie ist eine Verallgemeinerung der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen (Aussage 2.5), die zeigt, dass sich alle Funktionswerte einer harmonischen Funktion auf dem Inneren einer Kreisscheibe aus den Werten auf dem Rand ausrechnen lassen. Die Poissonsche Darstellungsformel kann andererseits auch als eine Entsprechung der Cauchyschen Integralformel für harmonische Funktionen aufgefasst werden. Dabei wird die Rolle des „Integralkerns“ $\frac{1}{\zeta - z}$ durch den „Poissonkern“ $\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$ übernommen.

2.8 Satz. (Poissonsche Darstellungsformel.) Sei $u : \overline{B(z_0, r)} \to \mathbb{R}$ stetig und $u|_{B(z_0,r)}$ harmonisch. Dann gilt für jedes $z \in B(z_0, r)$:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\psi}) \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2} \mathrm{d}\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\psi}) \operatorname{Re}\left(\frac{z_0 + re^{i\psi} + z}{z_0 + re^{i\psi} - z} \right) \mathrm{d}\psi \, . \end{aligned}$$

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B(z_0, r) = \mathbb{D}$ annehmen. Für gegebenes $z \in \mathbb{D}$ betrachten wir die Möbius-Transformation

$$\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}, \; \zeta \mapsto \frac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\,\zeta} \, .$$

Sie bildet $\zeta = 0$ auf $z \in \mathbb{D}$ ab, und außerdem den Einheitskreis auf sich selber, denn für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ gilt

$$|\zeta + z| = |\zeta \cdot (1 + \zeta^{-1} z)| = |1 + \bar{\zeta}\, z| = |1 + \zeta\, \bar{z}| \, .$$

Daher bildet Φ auch $\mathbb{D}$ auf sich ab. Wegen Aufgabe 2.3 ist daher $u \circ \Phi$ eine weitere auf $\mathbb{D}$ harmonische und auf $\bar{\mathbb{D}}$ stetige Funktion. Nach der Mittelwerteigenschaft (Aussage 2.5) für die harmonische Funktion $u \circ \Phi$ ist $(u \circ \Phi)(0)$ gleich dem Mittelwert von $u \circ \Phi$ auf Kreisen um Null mit beliebigem Radius $r < 1$. Weil $u \circ \Phi$ auf dem Kreis mit Radius Eins noch stetig ist, ist diese Aussage auch für $r = 1$ richtig, das heißt, es gilt

$$u(z) = (u \circ \Phi)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u \circ \Phi)(e^{i\varphi}) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\Phi(e^{i\varphi})) \mathrm{d}\varphi \, .$$

Wir substituieren nun

$$e^{i\psi} = \Phi(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}} \, .$$

Weil Φ eine Möbiustransformation ist, die den Einheitskreis auf sich abbildet, durchläuft mit φ auch ψ das reelle Intervall $[0, 2\pi]$. Wir erhalten

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\psi} - z}{1 - \bar{z} e^{i\psi}}$$

und

$$ie^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{ie^{i\psi}(1-\bar{z}e^{i\psi}) + \bar{z}ie^{i\psi}(e^{i\psi}-z)}{(1-\bar{z}e^{i\psi})^2}\mathrm{d}\psi = i\frac{(1-z\bar{z})\,e^{i\psi}}{(1-\bar{z}e^{i\psi})^2}\ ,$$

also

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{(1-z\bar{z})e^{i\psi}}{(1-\bar{z}e^{i\psi})^2}\cdot\frac{1-\bar{z}e^{i\psi}}{(e^{i\psi}-z)}\mathrm{d}\psi = \frac{1-z\bar{z}}{(e^{-i\psi}-\bar{z})(e^{i\psi}-z)}\mathrm{d}\psi = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\psi}-z|^2}\mathrm{d}\psi\ .$$

Insgesamt folgt dann

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\psi})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\psi}-z|^2}\mathrm{d}\psi\ .$$

□

Die Poissonsche Darstellungsformel zeigt, dass ein Dirichlet-Problem auf einer Kreisscheibe $B(z_0,r)$ zu einer gegebenenen stetigen Randfunktion $g:\partial B(z_0,r)\to\mathbb{R}$ höchstens eine Lösung u besitzen kann, denn die einzige mögliche Lösung ist durch die Formel im folgenden Satz gegeben. Tatsächlich wird aber – wie der folgende Satz zeigt – durch diese Formel tatsächlich eine Lösung gegeben. Damit ist das Dirichlet-Problem auf $B(z_0,r)$ zu jeder Randfunktion eindeutig lösbar.

2.9 Satz. (Lösung des Dirichlet-Problems auf $\boldsymbol{B(z_0,r)}$.) Sei $g:\partial B(z_0,r)\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Dirichlet-Problem auf $B(z_0,r)$ zur Randfunktion g eindeutig lösbar, und zwar ist die Lösung u für $z\in B(z_0,r)$ durch

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\psi}-z|^2}\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_0+re^{i\psi}+z}{z_0+re^{i\psi}-z}\right)\mathrm{d}\psi$$

gegeben.

Beweis. Für jedes $\psi\in\mathbb{R}$ ist die Funktion $z\mapsto\frac{z_0+re^{i\psi}+z}{z_0+re^{i\psi}-z}$ auf $z\in B(z_0,r)$ eine konvergente Potenzreihe, die für alle $\epsilon>0$ auf $z\in B(z_0,r-\epsilon)$ sogar gleichmäßig konvergiert. Weil g beschränkt ist, ist also auch die Funktion

$$z\mapsto\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\,\frac{z_0+re^{i\psi}+z}{z_0+re^{i\psi}-z}\,\mathrm{d}\psi$$

auf $B(z_0,r)$ eine konvergente Potenzreihe und damit holomorph. Also ist u auf $B(z_0,r)$ der Realteil einer holomorphen Funktion und somit harmonisch.

Wir müssen noch zeigen, dass sich die so definierte Funktion u stetig auf $\overline{B(z_0,r)}$ fortsetzen lässt und dort gleich g ist. Dazu bemerken wir, dass die Funktion $\psi\mapsto\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\psi}-z|^2}$ für jedes $z\in B(z_0,r)$ auf $\psi\in[0,2\pi]$ positiv ist. Durch Anwendung des Poissionschen Darstellungssatzes auf die harmonische Funktion $u=1$ ergibt sich, dass diese Funktion den Mittelwert 1 besitzt. Außerdem folgt für alle $\psi\in[0,2\pi]$ und alle $0<\delta\leq\sqrt[3]{2r}$ aus $|z_0+re^{i\psi}-z|\geq\delta$ und $r-\delta^3<|z-z_0|<r$

$$\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\psi}-z|^2} < \frac{r^2-(r-\delta^3)^2}{\delta^2} = \frac{\delta^3(2r-\delta^3)}{\delta^2} < 2r\delta\ .$$

Wegen der Stetigkeit von g gibt es für jedes $\varphi\in[0,2\pi]$ und jedes $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ so dass für alle $\psi\in[0,2\pi]$ mit $|z_0+re^{i\varphi}-z_0-re^{i\psi}|=|re^{i\varphi}-re^{i\psi}|<2\delta$ gilt $|g(z_0+re^{i\varphi})-g(z_0+re^{i\psi})|<\frac{\epsilon}{2}$. Weil

$\partial B(z_0, r)$ kompakt ist, ist $|g|$ beschränkt durch ein $M > 0$. Offenbar können wir δ sogar immer kleiner oder gleich $\min\{1, \sqrt[3]{2r}, \frac{\epsilon}{8rM}\}$ wählen. Dann folgt für alle $z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3)$

$$\begin{aligned}|u(z) - g(z_0 + re^{i\varphi})| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + re^{i\varphi})\right|\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2}\mathrm{d}\psi \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z_0 + re^{i\psi} - z| < \delta}\left|g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + re^{i\varphi})\right|\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2}\mathrm{d}\psi \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z_0 + re^{i\psi} - z| \geq \delta}\left|g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + re^{i\varphi})\right|\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2}\mathrm{d}\psi.\end{aligned}$$

Wegen $\delta \leq 1$ folgt aus $|z_0 + re^{i\varphi} - z| < \delta^3$ und $|z_0 + re^{i\psi} - z| < \delta$ auch $|re^{i\varphi} - re^{i\psi}| < \delta + \delta^3 \leq 2\delta$. Wegen der Stetigkeit von g ist dann das erste Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Das zweite Integral ist wegen der obigen Abschätzung von $\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\varphi} - z|^2}$ kleiner als $2r\delta \cdot 2M$. Wegen $\delta \leq \frac{\epsilon}{8rM}$ ist dann auch das zweite Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Also folgt

$$|u(z) - g(z_0 + re^{i\varphi})| < \epsilon \quad \text{für alle } z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3).$$

Dann läßt sich u stetig auf $\overline{B(z_0, r)}$ fortsetzen und auf $\partial B(z_0, r)$ gilt $u = g$. □

2.10 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die *die Mittelwerteigenschaft hat*, das heißt, dass für jedes $z_0 \in G$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi$. Dann ist u harmonisch.

Beweis. Sei $z_0 \in G$ gegeben und $r > 0$ so klein, dass $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt. $g := u|_{\partial B(z_0,r)}$ ist stetig, deshalb existiert nach Satz 2.9 eine Lösung $\tilde{u}$ des Dirichlet-Problems zu g, d.h. eine stetige Funktion $\tilde{u} : \overline{B(z_0, r)} \to \mathbb{R}$, die auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist und $\tilde{u}|_{\partial B(z_0,r)} = g = u|_{\partial B(z_0,r)}$ erfüllt. Als harmonische Funktion hat auch $\tilde{u}$ die Mittelwerteigenschaft nach Aussage 2.5. Wegen der Linearität erfüllt daher auch $u|_{\overline{B(z_0,r)}} - \tilde{u}$ die Mittelwerteigenschaft. Beim Beweis des Maximumprinzips Aussage 2.6 wurde für die betreffende Funktion nur die Mittelwerteigenschaft verwendet, deshalb nimmt $u|_{\overline{B(z_0,r)}} - \tilde{u}$ sowohl sein Maximum als auch sein Minimum auf $\partial B(z_0, r)$ an. Dort verschwindet $u - \tilde{u}$ aber. Hieraus folgt $u|_{B(z_0,r)} = \tilde{u}|_{B(z_0,r)}$, und somit ist u auf $B(z_0, r)$ harmonisch. □

Die folgende *Harnacksche Ungleichung* wird uns das erste Konvergenzprinzip für harmonische Funktionen, den *Satz von Harnack* liefern.

2.11 Aussage. (Harnacksche Ungleichung.) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit $u \geq 0$. Ist $z_0 \in G$ und $R > 0$ mit $\overline{B(z_0, R)} \subset G$, so gilt für alle $0 < r < R$ und alle $z \in G$ mit $|z - z_0| = r$

$$u(z_0) \cdot \frac{R - r}{R + r} \leq u(z) \leq u(z_0) \cdot \frac{R + r}{R - r}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $z_0 = 0$ annehmen. Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ gilt dann

$$R - r = |Re^{i\varphi}| - |z| \leq |Re^{i\varphi} - z| \leq |Re^{i\varphi}| + |z| = R + r\,.$$

Daraus folgt (durch Anwendung von x^{-2} und Multiplikation mit $R^2 - r^2$)

$$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} \leq \frac{R + r}{R - r}\,.$$

Indem wir diese Abschätzung für den Poissonkern in die Poissonsche Darstellungsformel Satz 2.8 einsetzen, erhalten wir die Behauptung. □

2.12 Satz. (Satz von Harnack.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von harmonischen Funktionen $u_n : G \to \mathbb{R}$.

(a) Konvergiert (u_n) kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion $u : G \to \mathbb{R}$, so ist u harmonisch.

(b) Ist die Folge (u_n) monoton wachsend (d.h. es gilt $u_1 \leq u_2 \leq \ldots$), so konvergiert (u_n) kompakt gleichmäßig entweder gegen ∞ oder gegen eine harmonische Funktion $u : G \to \mathbb{R}$.

Beweis. Zu (a). Jedenfalls ist die Grenzfunktion u unter den genannten Voraussetzungen stetig. Die Funktionen u_n besitzen nach Aussage 2.5 die Mittelwerteigenschaft. Wegen des Lebesgue-Satzes von der beschränkten Konvergenz folgt hieraus, dass auch die Grenzfunktion u die Mittelwerteigenschaft besitzt. Also ist nach Korollar 2.10 u harmonisch.

Zu (b). Indem wir von (u_n) zu $(u_n - u_1)$ übergehen, können wir annehmen, dass alle $u_n \geq 0$ sind. Wenn die monoton wachsende Folge $(u_n(z_0))$ für ein $z_0 \in G$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, und ist $R > 0$ so gewählt, dass $\overline{B(z_0, 2R)} \subset G$ ist, so zeigt die Harnacksche Ungleichung Aussage 2.11, dass für alle $z \in \overline{B(z_0, R)}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$u_n(z) \leq u_n(z_0) \cdot \frac{2R + |z - z_0|}{2R - |z - z_0|} \leq 3 \cdot u_n(z_0) \,.$$

Aus diesem Grund konvergiert u_n dann auf $\overline{B(z_0, R)}$ gleichmäßig gegen eine reellwertige Funktion u. Jede kompakte Teilmenge von G kann durch endlich viele derartige Bälle überdeckt werden, deshalb ist die Konvergenz kompakt gleichmäßig. Wegen (a) ist die Grenzfunktion u harmonisch. □

2.3 Subharmonische Funktionen

Um die einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen zu klassifizieren, wollen wir auf solchen Flächen injektive, holomorphe bzw. meromorphe Funktionen konstruieren. Es stellt sich aber als leichter heraus, zunächst harmonische Funktionen zu konstruieren, und aus diesen dann holomorphe Funktionen zu gewinnen. Harmonische Funktionen haben gegenüber holomorphen Funktionen den Vorteil, dass wir auf sie als reelle Funktionen das Prinzip der monotonen Konvergenz anwenden können, wie wir es schon im letzten Abschnitt mit dem Satz von Harnack (Satz 2.12) gemacht haben. Diesen Vorteil werden wir in diesem Abschnitt weiter ausbauen. Dazu erweitern wir unsere Betrachtungen zunächst auf die sogenannten subharmonischen Funktionen. Sie haben den „Vorteil“, dass sie nicht „starr“ sind, d.h. dass für subharmonische Funktionen kein Identitätssatz gilt. Deshalb kann man lokale subharmonische Funktionen (auf geeignete Weise) zu globalen Funktionen zusammenfügen. Dieses Verfahren wird es uns letztlich erlauben, harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen aus lokalen Lösungen des Dirichlet-Problems „zusammenzukleben“.

2.13 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion f heißt *subharmonisch* [subharmonic], wenn für jedes $z_0 \in G$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt:

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi \, .$$

Die Funktion f heißt *superharmonisch* [superharmonic], wenn $-f$ subharmonisch ist.

Sind f, g subharmonische Funktionen, so ist auch $f + g$ subharmonisch. Hingegen ist $f - g$ im Allgemeinen *nicht* subharmonisch. Ist $c > 0$, so ist mit f auch $c \cdot f$ subharmonisch; $(-c) \cdot f$ ist hingegen im Allgemeinen *nicht* subharmonisch, sondern superharmonisch.

Eine Funktion ist genau dann zugleich subharmonisch und superharmonisch, wenn sie harmonisch ist; das liegt daran, dass harmonische Funktionen durch die Mittelwerteigenschaft charakterisiert sind (siehe Aussage 2.5 und Korollar 2.10).

Einige Eigenschaften von harmonischen Funktionen übertragen sich auf subharmonische Funktionen. Hier ist vor allem das Maximumprinzip zu nennen.

2.14 Aussage. (Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine subharmonsiche Funktion. Wenn f auf G ein lokales Maximum besitzt, dann ist f konstant.

(b) Sei G beschränkt, $f, g : \overline{G} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, und $f|_G$ bzw. $g|_G$ sei subharmonisch bzw. superharmonisch. Wenn dann $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in \partial G$ gilt, so ist $f \leq g$.

Beweis. Für (a). f nehme etwa in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum an. Dann ist $f - f(z_0)$ in der Nähe von z_0 eine nicht-positive Funktion. Für jedes hinreichend kleine $r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt daher

$$0 = f(z_0) - f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi - f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)\big) \, \mathrm{d}\varphi \leq 0 \, .$$

Daraus folgt $f|_{\partial B(z_0,r)} = f(z_0)$. Dies zeigt, dass die Menge $\{z \in G \mid f(z) = f(z_0)\}$ in G offen ist; sie ist auch abgeschlossen und nicht-leer, und daher gleich G. Damit ist f konstant.

Für (b). Die Funktion $f - g = f + (-g)$ ist subharmonisch und nimmt auf dem Abschluss $\bar{G}$ von G ein Maximum an. Wegen (a) muss dieses auf dem Rand ∂G liegen, der entsprechenden Funktionswert ist deshalb nicht-positiv. Das zeigt $f - g \leq 0$. □

Ist f eine auf G subharmonische Funktion, und g eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset G$ harmonische Funktion, so ist $f + g$ subharmonisch auf U. Das Maximumprinzip aus Aussage 2.14(a) zeigt daher, dass $f + g$ entweder auf U konstant ist, oder dort kein lokales Maximum annimmt. Die folgende Aussage zeigt, dass subharmonische Funktionen durch diese Eigenschaft charakterisiert werden:

2.15 Aussage. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion f ist genau dann subharmonisch (superharmonisch), wenn für jede offene Teilmenge $U \subset G$ und jede harmonische Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ gilt: $f + g$ ist entweder auf U konstant oder nimmt dort kein lokales Maximum (Minimum) an.

Beweis. Es genügt, den subharmonischen Fall zu betrachten. Wir haben schon begründet, dass eine subharmonische Funktion die in der Aussage genannte Eigenschaft besitzt. Die stetige Funktion f erfülle nun umgekehrt die besagte Bedingung. Wir wählen $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ ist. Weil auf $U = B(z_0, r)$ das Dirichlet-Problem nach Satz 2.9 eindeutig lösbar ist, existiert eine stetige Funktion $g : \overline{U} \to \mathbb{R}$, so dass $g|_U$ harmonisch ist, und $g|_{\partial U} = f|_{\partial U}$ ist. Wir behaupten nun, dass $f|_U \leq g|_U$ ist: Wegen der Voraussetzung (angewendet für die harmonische Funktion $-g$) ist $f - g$ auf U entweder konstant, oder nimmt auf U kein lokales Maximum an. Ist $f - g$ auf U konstant, so muss die Konstante wegen $g|_{\partial U} = f|_{\partial U}$ aus Stetigkeitsgründen den Wert Null haben, also gilt $f|_U = g$. Andernfalls gilt: Wenn $f - g$ auf U positive Werte annähme, so würde diese Funktion auf U ein Maximum annehmen, weil sie auf ∂U verschwindet. Also gilt $(f - g)|_U \leq 0$ und somit $f|_U \leq g|_U$. Nun ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi = g(z_0) \geq f(z_0) \, .$$

Das zeigt, dass f subharmonisch ist. □

Die im Folgenden genannte Eigenschaft wird oft verwendet, um subharmonische Funktionen zu definieren:

2.16 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f genau dann subharmonisch, wenn für jede kompakte Teilmenge $A \subset G$ und jede stetige Funktion $g : A \to \mathbb{R}$, die auf A^o harmonisch ist, gilt: Wenn $f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ ist, so ist $f|_A \leq g$.

Beweis. Nach Aussage 2.15 ist f genau dann subharmonisch, wenn für jedes g von der im Korollar genannten Art gilt: Entweder ist $f|_A - g$ konstant, oder $f|_A - g$ nimmt sein Maximum auf ∂A an. Im ersten Fall ist wegen $f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ die Konstante ≤ 0, und damit gilt $f|_A \leq g$. Im zweiten Fall ist wegen $f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ der Wert dieses Maximums ≤ 0, und es folgt wieder $f|_A \leq g$. □

2.17 Korollar. Das Maximum von endlich vielen subharmonischen Funktionen ist subharmonisch.

Beweis. Wegen $\max(f_1, \ldots, f_n) = \max(f_1, \max(f_2, \max(f_3, \ldots)))$ genügt es zu zeigen, dass das Maximum zweier subharmonischer Funktionen $f_1, f_2 : G \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist. Dazu verwenden wir Korollar 2.16. Sei $A \subset G$ eine kompakte Teilmenge, und $g : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf A^o harmonisch ist, und für die $\max(f_1, f_2)|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ gilt. Dann gilt für $k \in \{1, 2\}$ insbesondere $f_k|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$. Nach Korollar 2.16 (angewendet auf f_k) folgt, dass $f_k|_A \leq g$ ist. Damit ist aber auch $\max(f_1, f_2)|_A \leq g$. Mit Korollar 2.16 folgt, dass f subharmonisch ist. □

Die folgende Schlussfolgerung zeigt, dass Subharmonizität eine lokale Eigenschaft ist:

2.18 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ eine steitge Funktion. Dann ist f genau dann subharmonisch, wenn es zu jedem $z \in G$ eine Umgebung $V \subset G$ von z gibt, so dass $f|_V$ subharmonisch ist.

Beweis. Wenn f subharmonisch ist, so ist offenbar auch jeweils $f|_V$ subharmonisch. Umgekehrt sei jeweils $f|_V$ subharmonisch. Wir wenden Aussage 2.15 an, um zu zeigen, dass f subharmonisch ist. Sei also $U \subset G$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Angenommen, $f+g$ würde in einem Punkt $z_0 \in U$ ein lokales Maximum annehmen. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung $V \subset G$ von z_0, so dass $f|_V$ harmonisch ist. Sei W die Zusammenhangskomponente von $U \cap V$, die z_0 enthält. Dann ist $f|_W$ auf W subharmonisch, $g|_W$ auf W harmonisch, und $f+g$ nimmt in $z_0 \in W$ ein lokales Maximum an. Nach Aussage 2.15 folgt, dass $(f+g)|_W$ konstant ist. Weil dies für jedes z_0 gilt, in dem $f+g$ ein lokales Maximum hat, folgt, dass $f+g$ auf ganz U konstant ist. Mit Aussage 2.15 folgt, dass f subharmonisch ist. □

2.4 Die Methode von Perron

In Korollar 2.17 haben wir gesehen, dass das Maximum von endlich vielen subharmonischen Funktionen wieder subharmonisch ist. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass das Supremum von unendlich vielen subharmonischen Funktionen unter ganz bestimmten Voraussetzungen nicht nur subharmonisch, sondern sogar harmonisch ist. Das entsprechende Konstruktionsverfahren für harmonische Funktionen nennt man die *Methode von Perron.*

2.19 Definition. (Perron-Familie.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und $f : \partial G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besteht die *Perron-Familie* [Perron family] $\mathcal{P}(G,f)$ aus allen subharmonischen Funktionen $g : G \to \mathbb{R}$, die für jedes $z_0 \in \partial G$ die Bedingung

$$\limsup_{z \to z_0} g(z) \leq f(z_0)$$

erfüllen.

2.20 Satz. (Methode von Perron.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und $f : \partial G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist folgende Funktion harmonisch:

$$h : G \to \mathbb{R},\ z \mapsto h(z) = \sup\{g(z) \mid g \in \mathcal{P}(G,f)\}\ .$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir das folgende Lemma. Es zeigt, auf welche Weise man eine harmonische Funktion in eine subharmonischen Funktion „einkleben" kann, um so eine Funktion zu erhalten, die insgesamt subharmonisch, aber auf einer Kreisscheibe sogar harmonisch ist.

2.21 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ eine subharmonische Funktion. Es sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{B(z_0,r)} \subset G$ ist. Dann sei g die Lösung des Dirichlet-Problems zu $f|_{\partial B(z_0,r)}$, d.h. $g : \overline{B(z_0,r)} \to \mathbb{R}$ ist die (nach Satz 2.9 eindeutig bestimmte) stetige Funktion, die auf $B(z_0,r)$ harmonisch ist und $g|_{\partial B(z_0,r)} = f|_{\partial B(z_0,r)}$ erfüllt. Dann ist die folgende Funktion h subharmonisch:

$$h : \quad G \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{für } z \in B(z_0,r) \\ f(z) & \text{für } z \in G \setminus B(z_0,r). \end{cases} .$$

Beweis. Wegen Korollar 2.18 sind $h|_{B(z_0,r)}$ und $h|_{G\setminus\overline{B(z_0,r)}}$ subharmonisch. Aus $f|_{\partial B(z_0,r)} = g|_{\partial B(z_0,r)}$ folgt nach Korollar 2.16: $f|_{B(z_0,r)} \leq g|_{B(z_0,r)}$, und somit ist $f \leq h$. Für $z \in \partial B(z_0,r)$

und $r' < r$ gilt daher

$$h(z) = f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r'e^{i\varphi})\, \mathrm{d}\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + r'e^{i\varphi})\, \mathrm{d}\varphi\ .$$

Daher ist h insgesamt subharmonisch. □

Beweis von Satz 2.20. Wir zeigen als Erstes, dass h tatsächlich reelle Werte annimmt: Weil G beschränkt ist, ist ∂G kompakt, und somit f nach oben durch ein $M \in \mathbb{R}$ beschränkt. Wegen des Maximumprinzips für subharmonische Funktionen ist M dann auch obere Schranke für jedes $g \in \mathcal{P}(G, f)$. Deshalb ist dann auch $h \leq M$, insbesondere ist h tatsächlich reellwertig.

Sei nun $z_0 \in G$ gegeben. Wir wählen $r > 0$ so klein, dass $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ ist. Wegen der Definition von h existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, so dass $(g_n(z_0))$ gegen $h(z_0)$ konvergiert. Wir konstruieren eine monoton wachsende Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von auf $B(z_0, r)$ harmonischen Funktionen in $\mathcal{P}(G, f)$, die gegen h konvergiert. Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $h_n : G \to \mathbb{R}$ durch $h_n|_{G\setminus B(z_0,r)} = \max\{g_1, \ldots, g_n\}|_{G\setminus B(z_0,r)}$; auf $B(z_0, r)$ sei h_n die Lösung des Dirichlet-Problems mit dem Randwert $\max\{g_1, \ldots, g_n\}|_{\partial B(z_0,r)}$ (siehe Satz 2.9). Nach Korollar 2.17 ist $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ jeweils eine subharmonische Funktion, deshalb zeigt Lemma 2.21, dass h_n subharmonisch ist. Somit ist h_n eine monoton wachsende Folge von subharmonischen Funktionen in $\mathcal{P}(G, f)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $g_n(z_0) \leq h_n(z_0) \leq h(z_0)$; weil $g_n(z_0) \to h(z_0)$ gilt, folgt $h_n(z_0) \to h(z_0)$. Die Funktionen $h_n|_{B(z_0,r)}$ sind nach Konstruktion harmonisch; mit dem Satz von Harnack (Satz 2.12(b)) folgt, dass die Folge (h_n) auf $B(z_0, r)$ kompakt gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $H : B(z_0, r) \to \mathbb{R}$ mit $H(z_0) = h(z_0)$ konvergiert.

Wir zeigen nun, dass $H = h|_{B(z_0,r)}$ ist. Dazu wählen wir $z_1 \in B(z_0, r)$. Es existiert wieder eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$ mit $\tilde{g}_n(z_1) \to h(z_1)$. Damit definieren wir neuerlich eine monoton wachsende Folge $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, so dass $\tilde{h}_n$ auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist und $\tilde{h}_n|_{\partial B(z_0,r)} = \max\{g_1, \ldots, g_n, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n\}$ ist. Auch diese Folge konvergiert nach dem Satz von Harnack auf $B(z_0, r)$ kompakt gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $\tilde{H} : B(z_0, r) \to \mathbb{R}$, für die $\tilde{H}(z_0) = h(z_0)$ und $\tilde{H}(z_1) = h(z_1)$ gilt. Es gilt $h_n|_{\partial B(z_0,r)} \leq \tilde{h}_n|_{\partial B(z_0,r)}$, und deshalb nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen (Aussage 2.6(b)) $h_n|_{B(z_0,r)} \leq \tilde{h}_n|_{B(z_0,r)}$. Daraus folgt $H \leq \tilde{H}$. Weil $H(z_0) = h(z_0) = \tilde{H}(z_0)$ ist, hat die harmonische Funktion $\tilde{H} - H$ in z_0 ein (lokales) Minimum, ist also nach dem Maximumprinzip Aussage 2.6(a) konstant. Deshalb ist $\tilde{H} = H$, und somit $H(z_1) = \tilde{H}(z_1) = h(z_1)$. Dies zeigt $H = h|_{B(z_0,r)}$, also ist h auf $B(z_0, r)$ harmonisch. □

2.5 Riemannsche Flächen mit Rand

Um das Dirichlet-Problem auch für Riemannsche Flächen formulieren zu können, benötigen wir das Konzept einer Riemannschen Fläche mit Rand. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ die abgeschlossene obere Halbebene in der komplexen Ebene. Für offene Teilmengen U von $\mathbb{B}$ nennt man eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, wenn es eine offene Teilmenge $\tilde{U} \supset U$ von $\mathbb{C}$ und eine Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{C}$ von f gibt, die im üblichen Sinn holomorph ist.

2.22 Definition. Sei X ein topologischer Raum.

(a) Eine *komplexe Karte mit Rand* [complex chart with boundary] von X ist ein Paar (U, φ) aus einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einem Homöomorphismus φ von U auf eine offene Teilmenge $U' = \varphi[U]$ von $\mathbb{B}$.

(b) Zwei komplexe Karten mit Rand (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) heißen heißen *holomorph verträglich* [holomorphically compatible], wenn $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ ist, oder wenn im Fall $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ der *Koordinatenwechsel* [transition function]

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1[U_1 \cap U_2]} : \varphi_1[U_1 \cap U_2] \to \varphi_2[U_1 \cap U_2]$$

biholomorph als Abbildung auf einer offenen Teilmenge in $\mathbb{B}$ ist.

(c) Ein *holomorpher Atlas mit Rand* [holomorphic atlas with boundary] für X ist eine Familie $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ von paarweise holomorph verträglichen Karten mit Rand auf X, so dass $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

(d) Ein holomorpher Atlas mit Rand $\mathfrak{A}$ heißt *maximal* [maximal], wenn für jede komplexe Karte mit Rand (U, φ) von X, die mit allen Karten mit Rand aus $\mathfrak{A}$ verträglich ist, schon $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ gilt.

(e) Eine *Riemannsche Fläche mit Rand* [Riemann surface with boundary] ist ein Paar $(X, \mathfrak{A})$, bestehend aus einem wegzusammenhängenden, metrisierbareren, hausdorffschen topologischen Raum X mit abzählbarer Basis der Topologie und einem holomorphen Atlas mit Rand $\mathfrak{A}$ auf X.

Holomorphe, meromorphe, harmonische Funktionen, Differentialformen usw. werden für Riemannsche Flächen mit Rand sinngemäß definiert. Subharmonische und superharmonische Funktionen $X \to \mathbb{R}$ definieren wir *mutatis mutandis* mit Hilfe des Kriteriums aus Korollar 2.16.

Wenn wir von Riemannschen Flächen „mit Rand" sprechen, sollten wir auch sagen, was denn nun der Rand einer solchen Fläche ist. Das wird in der folgenden Aussage erledigt:

2.23 Aussage und Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche mit Rand und $x_0 \in X$. Für Karten mit Rand (U, φ) mit $x_0 \in U$ ist die Gültigkeit der Bedingung $\varphi(x_0) \in \partial\mathbb{B} = \mathbb{R}$ von der Wahl der Karte unabhängig. Gilt diese Bedingung, so heißt x_0 ein *Randpunkt* [boundary point] von X. Die Menge der Randpunkte von X wird mit ∂X bezeichnet. Ist x_0 kein Randpunkt, so heißt x_0 ein *innerer Punkt* [inner point] von X. Die Menge der inneren Punkte von X wird mit $X^o = X \setminus \partial X$ bezeichnet.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für je zwei offene Teilmengen U_1, U_2 von $\mathbb{B}$ und jeden Homöomorphismus $f : U_1 \to U_2$ gilt: $f[U_1 \cap \partial\mathbb{B}] = U_2 \cap \partial\mathbb{B}$. Dies ist der Fall, weil sich die inneren Punkte $z \in \mathbb{B}$ von $\mathbb{B}$ eindeutig dadurch charakterisieren lassen, dass es eine ε-Umgebung $B(z, \varepsilon)$ gibt, die ganz in $\mathbb{B}$ enthalten ist. □

2.6 Das allgemeine Dirichlet-Problem

In diesem Abschnitt werden wir die Methode von Perron verwenden, um das Dirichlet-Problem allgemein zu lösen, zunächst für Gebiete in $\mathbb{C}$, und dann für Riemannsche Flächen mit Rand.

2.24 Definition. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *Dirichlet-Gebiet*, wenn das Dirichlet-Problem für jede stetige Randfunktion auf ∂G eindeutig lösbar ist, d.h. wenn es für jede stetige Funktion $g : \partial G \to \mathbb{R}$ genau eine stetige Funktion $f : \bar{G} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f|_G$ harmonisch ist und $f|_{\partial G} = g$ gilt.

Wir haben schon in Satz 2.9 gesehen, dass alle offenen Bälle $B(z_0, r)$ Dirichlet-Gebiete sind. Wir werden jetzt gleich sehen, dass alle beschränkten Gebiete mit hinreichend guten Rändern Dirichlet-Gebiete sind.

2.25 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $z_0 \in \partial G$. Eine *Barriere* [barrier] für G in z_0 ist eine Familie $\{\psi_r \mid r > 0\}$ von reellen Funktionen ψ_r mit folgenden Eigenschaften:

(i) ψ_r ist auf $G \cap B(z_0, r)$ superharmonisch mit $0 \leq \psi_r \leq 1$.

(ii) ψ_r läßt sich stetig auf dem Abschluss von $G \cap B(z_0, r)$ in $\mathbb{C}$ fortsetzen. Diese Fortsetzung verschwindet bei z_0, und ist auf $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$ gleich 1.

2.26 Satz. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Dirichlet-Gebiet, wenn jeder Randpunkt von G eine Barriere hat.

Beweis. Es sei zunächst G ein Dirichlet-Gebiet. Zu vorgegebenem $z_0 \in \partial G$ ist $g : \partial G \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \frac{|z-z_0|}{1+|z-z_0|}$ eine stetige Funktion mit $0 \leq g \leq 1$, die nur bei z_0 verschwindet. Weil G ein Dirichlet-Gebiet ist, existiert genau eine Lösung des Dirichlet-Problems zu g, d.h. genau eine stetige Funktion $f : \bar{G} \to \mathbb{R}$, so dass $f|_G$ harmonisch ist, und $f|_{\partial G} = g$ gilt. Weil f sein Maximum und sein Minimum auf ∂G annimmt, ist $0 \leq f \leq 1$. Für $r > 0$ sei $c_r \geq 0$ der minimale Funktionswert, der von f auf der kompakten Menge $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$ angenommen wird. Wenn $c_r = 0$ wäre, so würde dieses Minimum in einem Punkt in G angenommen, und deshalb wäre f dann nach dem Maximumprinzip Aussage 2.6(a) konstant. Also ist $c_r > 0$. Die Funktion $\psi_r := \frac{1}{c_r} \min\{f, c_r\}$ ist nach Korollar 2.17 (bzw. der analogen Aussage für superharmonische Funktionen) auf $G \cap B(z_0, r)$ superharmonisch, es gilt $0 \leq \psi_r \leq 1$, $\psi_r(z_0) = 0$ und $\psi_r|_{\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)} = 1$. Also ist $\{\psi_r \mid r > 0\}$ eine Barriere für G in z_0.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass das Gebiet G an jedem Randpunkt eine Barriere besitzt. Dann sei eine stetige Funktion $g : \partial G \to \mathbb{R}$ gegeben. Nach dem Satz 2.20 über die Methode von Perron ist die Funktion

$$f : G \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sup\{h(z) \mid h \in \mathcal{P}(G, g)\}$$

harmonisch. Wir werden zeigen, dass f stetig auf $\bar{G}$ fortgesetzt werden kann und dann $f|_{\partial G} = g$ gilt. Damit ist f dann eine Lösung des Dirichlet-Problems zu g. Wegen Aussage 2.6(b) ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Sei dafür $z_0 \in \partial G$ und $\{\psi_r \mid r > 0\}$ eine Barriere für G in z_0. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g(z_0) = 0$ annehmen. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so gewählt, dass $|g(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in B(z_0, 2\delta) \cap \partial G$ gilt. Dann definieren wir $\psi : G \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_\delta(z) & \text{für } z \in G \cap \overline{B(z_0, \delta)} \\ 1 & \text{für } z \in G \setminus B(z_0, \delta) \end{cases} .$$

Offenbar ist ψ superharmonisch und es gilt $\psi \geq 0$. Sei $M > 0$ das Maximum von $|g|$ auf ∂G. Wir zeigen nun

$$-M\psi - \varepsilon \leq f \leq M\psi + \varepsilon\ .$$

Die linke Ungleichung folgt aus $-M\psi - \varepsilon \in \mathcal{P}(G, g)$, was der Fall ist, denn $-M\psi - \varepsilon$ ist subharmonisch, es gilt für $z \in \partial G \cap B(z_0, \delta)$

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq -\varepsilon < g(z)$$

und für $z \in \partial G \setminus B(z_0, \delta)$ gilt $\psi(z) = 1$ und deshalb

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq -M \leq g(z)\ .$$

Andererseits ist jedes $h \in \mathcal{P}(G, g)$ auf ∂G durch $g \leq M\psi + \varepsilon$ nach oben beschränkt. Weil h subharmonisch und $M\psi + \varepsilon$ superharmonisch ist, folgt $h \leq M\psi + \varepsilon$ auf ganz G nach Aussage 2.14(b). Durch Bildung des Supremums über alle $h \in \mathcal{P}(G, g)$ folgt heraus die rechte Ungleichung.

Die obige Ungleichung zeigt wegen $\psi(z_0) = 0$: $-\varepsilon \leq f(z_0) \leq \varepsilon$. Indem man nun $\varepsilon \to 0$ gehen lässt, folgt $f(z_0) = 0 = g(z_0)$, was zu zeigen war.

Der Nutzen der Barriere bei diesem Beweis bestand darin, die Funktion ψ zu konstruieren, mit deren Hilfe wir f „einklemmen" konnten. □

Wegen des vorhergehenden Satzes ist es extrem interessant, wenn man weiß, dass bei einem bestimmten Gebiet jeder Randpunkt eine Barriere besitzt. Das folgende Lemma liefert hierfür ein (hinreichendes) Kriterium. Es zeigt, dass die Voraussetzung von Satz 2.26 für jedes beschränkte Gebiet in $\mathbb{C}$, dessen Rand „hinreichend gutartig" ist, erfüllt ist.

2.27 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $z_0 \in \partial G$. Wenn es ein $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \bar{G}$ gibt, so dass für die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1] = \{z_0 + t(z_1 - z_0) \mid t \in [0, 1]\}$ gilt: $[z_0, z_1] \cap \bar{G} = \{z_0\}$, dann besitzt G bei z_0 eine Barriere.

Beweis. Sind $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ zwei beschränkte Gebiete, $\varphi : \bar{G}_1 \to \bar{G}_2$ biholomorph, und $z_0 \in \partial G_1$. Dann besitzt G_1 genau dann eine Barriere in z_0, wenn G_2 eine Barriere in $\varphi(z_0)$ besitzt. Diese Aussage verwenden wir, indem wir zu $G_1 = G$ unter der genannten Voraussetzung eine biholomorphe Abbildung auf die Einheitskreisscheibe $G_2 = \mathbb{D}$ konstruieren. Da letztere ein Dirichlet-Gebiet ist, besitzt nach Satz 2.26 jeder Randpunkt von $\mathbb{D}$ eine Barriere. Daher folgt dann, dass G bei z_0 eine Barriere besitzt.

Die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-z_0}{z-z_1}$ bildet die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1]$ auf $\mathbb{R}_0^-$ ab, denn für $t \in \mathbb{R}^-$ gilt

$$\frac{z - z_0}{z - z_1} = -t \iff z(1 + t) = z_0 + z_1 t \iff z = z_0 + \frac{t}{1 + t}(z_1 - z_0)\ .$$

Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ist einfach zusammenhängend, und besitzt den Zweig der Quadratwurzelfunktion

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) > 0\},\ z \mapsto \sqrt{z}\ ,$$

die mit diesem Definitions- und Wertebereich biholomorph ist. Das Bild wird durch die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ auf $\mathbb{D}$ abgebildet. Dabei wird der Randpunkt z_0 auf $-1 \in \partial\mathbb{D}$ abgebildet. Nach dem anfangs Gesagten folgt, dass G in z_0 eine Barriere hat. □

Jetzt können wir auch das Dirichletproblem auf beliebigen Riemannschen Flächen mit kompaktem Rand lösen.

2.28 Theorem. Sei X eine Riemannsche Fläche mit kompaktem Rand ∂X, und $f : \partial X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, so dass $g|_{X^o}$ harmonisch ist, und $g|_{\partial X} = f$ gilt.

Beweis. Wir wollen die Perron-Methode verwenden, um die gesuchte Funktion zu konstruieren. Weil X im Allgemeinen nicht kompakt ist, sind stetige Funktionen auf X nicht unbedingt beschränkt. Aus diesem Grund müssen wir die Definition der Perron-Familie für diesen Fall modifizieren: Die *modifizierte Perron-Familie* $\widetilde{\mathcal{P}}(X, f)$ besteht aus allen stetigen Funktionen $g : X \to \mathbb{R}$, so dass $g|_{X^o}$ subharmonisch ist, für alle $x_0 \in \partial X$

$$\limsup_{x \to x_0} g(x) \leq f(x_0)$$

gilt, und die $g \leq \max_{x \in \partial X} f(x) \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Wegen Korollar 2.17 ist das Maximum von endlich vielen Elementen von $\widetilde{\mathcal{P}}(X, f)$ wieder in $\widetilde{\mathcal{P}}(X, f)$, und die in Lemma 2.21 aus einem $f \in \widetilde{\mathcal{P}}(X, f)$ konstruierten Funktion h ist wieder in $\widetilde{\mathcal{P}}(X, f)$. Deshalb übertragen sich die Argumente aus den Beweisen der Sätze 2.20 und 2.26 auf die vorliegende Situation.

Ist $x_0 \in \partial X$, so existiert eine Karte (U, z) von X mit $z(x_0) = 0$, $\mathrm{Im}(z(x)) = 0$ für alle $x \in \partial X \cap U$ und $\mathrm{Im}(z(x)) > 0$ für alle $x \in X^o \cap U$. Daher erfüllt $G := z[U^o]$ die Bedingung von Lemma 2.27 mit $z_0 = 0$ und $z_1 = -i$. Nach diesem Lemma besitzt G eine Barriere in $z_0 = z(x_0)$, und daher besitzt X eine Barriere in x_0.

Daher ist nach (der auf die vorliegende Situation übertragenen Version von) Satz 2.26 das Dirichlet-Problem auf X zu f eindeutig lösbar. □

2.7 Der Anulus-Satz

Ein wichtiger Teilschritt auf dem Weg zum großen Riemannschen Abbildungssatz ist der Anulus-Satz, den wir in diesem Abschnitt vorstellen und beweisen. Er zeigt, dass eine einfach zusammenhängende (bzw. planare, vgl. Definition 2.29) Riemannsche Fläche, aus der man zwei abgeschlossene Bälle „herausgeschnitten“ hat, zu einem Kreisring in $\mathbb{C}$ biholomorph ist.

Die folgende Definition hat provisorischen Charakter, d.h. sie erfolgt nur, um den Beweis des großen Riemannschen Abbildungssatz besser zu organisieren. Am Ende wird sich herausstellen, dass eine Riemannsche Fläche genau dann planar ist, wenn sie einfach zusammenhängend ist.

2.29 Definition. Eine Riemannsche Fläche X (ohne Rand) heißt *planar* [planar], wenn jede geschlossene 1-Form auf X mit kompaktem Träger exakt ist.

2.30 Satz. (Anulus-Satz) Sei X eine kompakte, planare Riemannsche Fläche, $D \subset X$ eine offene Teilmenge, die zu $\mathbb{D}$ biholomorph äquivalent ist, und $A, B \subset D \cong \mathbb{D}$ zwei abgeschlossene Kreisscheiben. Dann existiert ein $R > 1$, so dass die Riemannsche Fläche $X \setminus (A \cup B)$ zum Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$$

biholomorph äquivalent ist.

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Vorbereitung. In der Situation von Satz 2.30 identifizieren wir D mit $\mathbb{D}$ und bezeichnen die Mittelpunkte der Kreisscheiben A bzw. B mit $a, b \in \mathbb{D} \simeq D$. Wir bezeichnen mit A_ε und B_ε die abgeschlossenen Bälle um a und b mit Radius ε, und mit X_ε die Riemannsche Fläche $X \setminus (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)$. Hierbei sei ε klein genug, so dass sich A_ε und B_ε nicht schneiden. C sei die geschlossene Kurve $\partial B(a,r)$; dabei sei einerseits $r > \varepsilon$, andererseits sei r klein genug, dass sich auch $\overline{B(a,r)}$ und $\overline{B(b,\varepsilon)}$ nicht schneiden.

2.31 Lemma. In der zuvor beschriebenen Situation gilt für jede glatte, geschlossene 1-Form ω auf X_ε: Wenn $\int_C \omega \in \mathbb{Z}$ ist, so ist auch $\int_\gamma \omega \in \mathbb{Z}$ für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede geschlossene 1-Form ω auf X_ε, die $\int_C \omega = 0$ erfüllt, exakt ist. Weil ω geschlossen ist, verschwindet für kleine $t > 0$ das Flächenintegral von $\mathrm{d}\omega$ auf der zwischen C und $\partial A_{\varepsilon+t}$ eingeschlossenen Fläche F, sowie auf der zwischen C und $\partial B_{\varepsilon+t}$ eingeschlossenen Fläche. Mit dem Satz von Stokes (Satz 1.20) folgt hieraus $\int_{\partial A_{\varepsilon+t}} \omega = \int_C \omega + \int_F \mathrm{d}\omega = 0$ und entsprechend $\int_{\partial B_{\varepsilon+t}} \omega = 0$. Also gibt es glatte Funktionen φ und ψ, die außerhalb von $A_{\varepsilon+t}$ bzw. $B_{\varepsilon+t}$ verschwinden, so dass $\omega - \mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\psi$ in einer Umgebung von ∂A_ε und ∂B_ε verschwindet. Daher lässt sich $\omega - \mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\psi$ zu einer geschlossenen 1-Form auf X fortsetzen; ihr Träger ist in $\bar{A}_\varepsilon \cup \bar{B}_\varepsilon$ enthalten und deshalb kompakt. Weil X planar ist, folgt, dass $\omega - \mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\psi$ exakt ist. Also ist auch ω auf X_ε exakt.

Als nächstes zeigen wir, dass es eine geschlossene Form Ω auf X_ε gibt, so dass $\int_C \Omega = 1$ und $\int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}$ für alle geschlossenen Wege $\gamma \in X_\varepsilon$ gilt. Dazu definieren wir zunächst

$$\Omega' = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{\mathrm{d}z}{z-b} - \frac{\mathrm{d}z}{z-a} \right) \text{ auf } \mathbb{D} \setminus \{a,b\}.$$

Dann gilt $\int_C \Omega' = 1$ mit der entsprechenden Orientierung von C und $\int_{\partial B(0,t)} \Omega' = 0$ für $t < 1$ aber dicht bei 1. Also gibt es eine glatte Funktion ζ auf X, so dass $\Omega' - \mathrm{d}\zeta$ auf einer Umgebung von $\partial B(0,1)$ verschwindet. Dann ist die Fortsetzung von $\Omega' - \mathrm{d}\zeta$ auf X, die auf D verschwindet, exakt. Also gibt es eine geschlossene Form Ω auf X_ε, die auf $D \setminus \{a,b\}$ mit Ω' übereinstimmt, und auf $X \setminus \bar{D}$ exakt ist. Jeder geschlossene Weg von X_ε läßt sich zerlegen in geschlossene Wege in $B(0,t) \subset D$ mit $t < 1$ aber dicht bei 1 und geschlossene Wege in $X \setminus \bar{D}$. Dann folgt die Behauptung.

Nun betrachten wir eine geschlossene 1-Form ω auf X_ε, die $\int_C \omega \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Dann ist $\omega' = \omega - \left(\int_C \omega\right) \Omega$ eine geschlossene 1-Form auf X_ε, die $\int_C \omega' = 0$ erfüllt. Wegen dem ersten Beweisschritt ist ω' also exakt. Damit folgt für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega' + \int_C \omega \int_\gamma \Omega = \int_C \omega \int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}\,.$$

□

Beim Beweis des Anulus-Satz verwenden wir weiter den sogenannten *Hodge-$*$-Operator* [Hodge star operator] für 1-Formen. Er ist dadurch definiert, dass bezüglich beliebiger holomorpher Karten z und glatter Funktionen $f(z)$, $g(z)$ gilt:

$$*\big(f(z)\,\mathrm{d}z + g(z)\,\mathrm{d}\bar{z}\big) = -i\,f(z)\,\mathrm{d}z + i\,g(z)\,\mathrm{d}\bar{z}\,.$$

Man überprüft leicht:

2.32 Aufgabe. Sei X eine Riemannsche Fläche.

(a) Durch $*$ wird ein wohldefinierter (koordinatenunabhängiger) linearer Operator auf dem Raum der glatten 1-Formen auf X definiert.

(b) Eine zweimal differenzierbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn $*dh$ geschlossen ist, also $d * dh = 0$ gilt.

(c) Ist $h : X \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so ist jede Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, die $df = dh + i * dh$ erfüllt, holomorph.

(d) Ist $G \subset \mathbb{C}$ und ω eine reelle 1-Form (d.h. $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z + g(z)\,\mathrm{d}\bar{z}$ mit reellwertigen Funktion $f, g : G \to \mathbb{R}$), so ist $\omega \wedge *\omega$ punktweise ein nicht-negatives, reelles Vielfaches der „Standardorientierung von $\mathbb{C}$“, d.h. der 2-Form $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Außerdem hat $\omega \wedge *\omega$ nur an den Nullstellen von ω Nullstellen.

Beweis des Anulus-Satzes (Satz 2.30). Die Riemannsche Fläche mit Rand $\bar{X}_\varepsilon$ hat kompakten Rand $\partial X_\varepsilon = \partial A_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon$. Nach Theorem 2.28 besitzen deshalb Dirichlet-Probleme auf $\bar{X}_\varepsilon$ eindeutige Lösungen. Für $c > 0$ sei $h_c : \bar{X}_\varepsilon \to \mathbb{R}$ die Lösung des Dirichlet-Problems zur stetigen Randfunktion $h_c : \partial A_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon \to \mathbb{R}$ mit $h_c|_{\partial A_\varepsilon} = c$ und $h_c|_{\partial B_\varepsilon} = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieses Dirichlet-Problems gilt jeweils $h_c = c \cdot h_1$. Weil h_c harmonisch ist, wegen des Satzes von Stokes (Satz 1.20), und weil ∂A_ε in $\bar{X}_\varepsilon$ homotop zu C ist, gilt

$$\int_{X_\varepsilon} \mathrm{d}h_c \wedge *\mathrm{d}h_c = \int_{X_\varepsilon} \mathrm{d}(h_c \cdot *\mathrm{d}h_c) = \int_{\partial A_\varepsilon} h_c \cdot *\mathrm{d}h_c + \int_{\partial B_\varepsilon} h_c \cdot *\mathrm{d}h_c = c \cdot \int_{\partial A_\varepsilon} *\mathrm{d}h_c = c \cdot \int_C *\mathrm{d}h_c \,.$$

Wegen Aufgabe 2.32(d) ist $\int_{X_\varepsilon} \mathrm{d}h_c \wedge *\mathrm{d}h_c > 0$. Deshalb folgt, dass es genau ein $c > 0$ gibt, so dass $\int_C *\mathrm{d}h_c = 1$ ist. Weil $*\mathrm{d}h_c$ nach Aufgabe 2.32(b) geschlossen ist, folgt aus Lemma 2.31, dass $\int_\gamma *\mathrm{d}h_c \in \mathbb{Z}$ für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε gilt. Deshalb ist für fixiertes $x_0 \in X_\varepsilon$ und beliebiges $x \in X_\varepsilon$ der Wert

$$f(x) = \exp\left(2\pi \int_{x_0}^{x} (\mathrm{d}h_c + i * \mathrm{d}h_c)\right) \cdot \exp(2\pi h_c(x_0))$$

unabhängig von der Wahl des Integrationswegs in X_ε von x_0 nach x, so dass hierdurch eine Funktion $f : X_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definiert wird. Nach Aufgabe 2.32(c) ist der Integrand $\mathrm{d}h_c + i * \mathrm{d}h_c$ holomorph, und deshalb ist auch f holomorph. Wegen der Formel $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ gilt für jedes $x \in X_\varepsilon$: $|f(x)| = \exp(2\pi h_c(x))$. Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen, angewendet auf die harmonische Funktion h_c, ist $0 < h_c < c$ auf X_ε (die strengen Ungleichungen gelten, weil h_c sonst konstant wäre), und somit ist das Bild von f im Anulus

$$M := \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \exp(2\pi c) \}$$

enthalten. Und zwar ist das Bild $f[X_\varepsilon]$ einerseits nach dem Satz vom offenen Bild eine offene Teilmenge von M; andererseits ist $\bar{X}_\varepsilon$ kompakt, und deshalb ist $\overline{f[X_\varepsilon]} = f[\bar{X}_\varepsilon]$ eine kompakte Teilmenge von $\bar{M}$. Deshalb ist $f[X_\varepsilon] = f[\bar{X}_\varepsilon] \cap M$ auch abgeschlossen in M. Weil M zusammenhängend ist, folgt hieraus $f[X_\varepsilon] = M$.

Es verbleibt zu zeigen, dass f injektiv ist; nach dem Satz von Osgood ist dann $f : X_\varepsilon \to M$ biholomorph. Wir benutzen dazu, dass nicht-konstante holomorphe Abbildungen „verzweigte Überlagerungen“ sind, d.h. dass es eine diskrete Menge $N \subset X_\varepsilon$ gibt, so dass $f|_{(X_\varepsilon \setminus N)}$ eine holomorphe Überlagerung ist, und dass an den „Verzweigungspunkten“, d.h. den Punkten von N die Fasern von f höchstens so viele Punkte enthalten wie die Blätterzahl der Überlagerung angibt. Deshalb ist

$$\int_{\bar{X}_\varepsilon} f^*(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}) = \deg(f) \cdot \int_M \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \;, \tag{$*$}$$

wobei $\deg(f) \in \mathbb{N}$ auch der „Abbildungsgrad“ von f heißt. Aus dem zuvor gesagten folgt: Wenn $\deg(f) = \pm 1$ ist, so ist f injektiv. Um $\deg(f)$ zu bestimmen, sollten wir also die beiden Integrale in $(*)$ ausrechnen.

Auf der einen Seite gilt

$$\int_M \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -2i \cdot \int_M \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -2i \cdot \mathrm{vol}(M) = -2i \cdot \pi(\exp(4\pi c) - 1) \;.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}) &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{f} = |f|^2 \cdot \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\bar{f}} = \exp(4\pi h_c) \cdot (2\pi(\mathrm{d}h_c + i * \mathrm{d}h_c)) \wedge (2\pi(\mathrm{d}h_c - i * \mathrm{d}h_c)) \\ &= \exp(4\pi h_c) \cdot 4\pi^2 \cdot (-2i) \cdot (\mathrm{d}h_c \wedge *\mathrm{d}h_c) = -2\pi i \cdot \mathrm{d}\big(\exp(4\pi h_c)\big) \wedge *\mathrm{d}h_c \\ &= -2\pi i \cdot \mathrm{d}\big(\exp(4\pi h_c) \cdot *\mathrm{d}h_c\big) \end{aligned}$$

und somit nach dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{X}_\varepsilon} f^*(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}) &= -2\pi i \int_{\bar{X}_\varepsilon} \mathrm{d}\big(\exp(4\pi h_c) \cdot *\mathrm{d}h_c\big) = -2\pi i \int_{\partial \bar{X}_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *\mathrm{d}h_c \\ &= -2\pi i \cdot \left(\int_{\partial A_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *\mathrm{d}h_c + \int_{\partial B_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *\mathrm{d}h_c \right) \\ &= -2\pi i \cdot \left(\exp(4\pi c) \int_{\partial A_\varepsilon} *\mathrm{d}h_c + \int_{\partial B_\varepsilon} *\mathrm{d}h_c \right) \\ &= -2\pi i \cdot (\exp(4\pi c) - 1) \;. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der beiden Rechenergebnisse in $(*)$ ergibt sich $\deg(f) = 1$ und damit die Injektivität von f. □

2.33 Korollar. Sei X eine Riemannsche Fläche mit Rand, die als topologischer Raum homöomorph zu $S^1 \times [0,1]$ ist. Dann gibt es ein $R > 1$, so dass das Innere $X^o \cong S^1 \times (0,1)$ biholomorph ist zum Anulus

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\} \;.$$

Beweis. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$, und ein Erzeuger von $\pi_1(X)$ ist die Homotopieklasse der geschlossenen Kurve $C : S^1 \to X \cong S^1 \times [0,1]$, $\varphi \mapsto (\varphi, 0)$. Daher hat X mit dieser Kurve C sinngemäß die Eigenschaft von Lemma 2.31. Der Beweis des Anulus-Satzes überträgt sich nun auf die gegenwärtige Situation. □

2.8 Der große Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt werden wir den großen Riemannschen Abbildungssatz beweisen. Wichtige Zutaten für dessen Beweis sind die Lösung des Dirichlet-Problems, der Anulus-Satz, und der „kleine“ Riemannsche Abbildungssatz. Hinzu kommt der sogenannte Satz von Koebe, eine erweiterte Version des Satzes von Montel, der die Konvergenz von injektiven holomorphen Funktionen charakterisiert; solche Funktionen nennt man manchmal auch *schlichte Funktionen**.

Zur Erinnerung:

2.34 Aussage. (Satz von Montel.) Sei $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Familie von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ oder einer Riemannschen Fläche X. Dann ist $\mathcal{F}$ *normal*, d.h. jede Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge.

2.35 Satz. (Satz von Koebe.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $x_0 \in G$. Dann ist die Menge $\mathcal{F}$ aller injektiven holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 1$ kompakt, d.h. jede Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in $\mathcal{F}$ liegt.

Wir bereiten den Beweis des Satzes von Koebe durch die folgenden beiden Lemmata vor:

2.36 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\mathbb{C} \setminus G$ innere Punkte enthält, und $x_0 \in G$. Dann besitzt jede Folge von holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to G$ mit $f(0) = x_0$ eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}$ ein innerer Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$. Dann wird durch $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ das Gebiet G biholomorph auf ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ abgebildet. Also folgt die Aussage aus dem Satz von Montel (Aussage 2.34). □

2.37 Lemma. Die Menge $\mathcal{F}$ der injektiven holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist kompakt, d.h. jede Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in $\mathcal{F}$ liegt.

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{F}$. Zu zeigen ist, dass (f_n) eine Teilfolge besitzt, die kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion in $\mathcal{F}$ konvergiert.

Nach dem Satz vom offenen Bild ist für $n \in \mathbb{N}$ jeweils $f_n[\mathbb{D}]$ offen in $\mathbb{C}$ und es gilt $0 \in f_n[\mathbb{D}]$. Daher erfüllt der maximale Radius r_n, so dass $B(0, r_n) \subset f_n[\mathbb{D}]$ ist, $r_n > 0$. Wir behaupten, dass andererseits $r_n < 2$ gilt: Wäre $r_n \geq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so wäre $B(0, 2) \subset f_n[\mathbb{D}]$, also ist $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ z \mapsto f_n^{-1}(2z)$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion mit $g(0) = 0$ und $|g(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$. Nach dem Lemma von Schwarz gilt $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, und folglich $|f_n^{-1}(z)| \leq \frac{1}{2}|z|$ für alle $z \in B(0, 2)$. Daraus folgt $|(f_n^{-1})'(0)| \leq \frac{1}{2}$ und somit $|f_n'(0)| \geq 2$ im Widerspruch zu $f_n'(0) = 1$.

Wegen der Maximalität von r_n ist $\partial B(0, r_n) \setminus f_n[\mathbb{D}] \neq \varnothing$, und wir wählen ein $a_n \in \partial B(0, r_n) \setminus f_n[\mathbb{D}]$. Wir setzen $g_n = \frac{1}{a_n} \cdot f_n$. Dann gilt $\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}]$, aber $1 \notin g_n[\mathbb{D}]$. Weil $g_n[\mathbb{D}]$ einfach

*Manchmal ist mit einer „schlichten Funktion“ allerdings auch eine biholomorphe Funktion, oder eine biholomorphe Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, oder ein ähnliches Konzept gemeint. In englischsprachigen Texten sieht man gelegentlich “schlicht function”.

zusammenhängend ist, existiert auf diesem Gebiet eine „Quadratwurzel“ aus $z-1$, d.h. es existiert genau eine holomorphe Funktion $\psi_n : g_n[\mathbb{D}] \to \mathbb{C}$ mit $\psi_n^2 = z-1$ und $\psi_n(0) = i$. Für die holomorphe Funktion $h_n := \psi_n \circ g_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ gilt dann $h_n^2 = g_n - 1$ und $h_n(0) = i$.

Wir behaupten nun, dass $h_n[\mathbb{D}] \cap (-h_n[\mathbb{D}]) = \varnothing$ gilt. Das liegt daran, dass mit f_n auch g_n injektiv ist. Gäbe es nun $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ mit $h_n(z_1) = -h_n(z_2)$, so wäre $g_n(z_1) = h_n(z_1)^2 + 1 = h_n(z_2)^2 + 1 = g_n(z_2)$ und somit $z_1 = z_2$. Daraus folgt $h_n(z_1) = 0$ und somit $g_n(z_1) = h_n(z_1)^2 + 1 = 1$ im Widerspruch zu $1 \notin g_n[\mathbb{D}]$.

Wegen $\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}]$ ist $U := \psi_n[\mathbb{D}] \subset h_n[\mathbb{D}]$ und somit folgt $(-U) \cap h_n[\mathbb{D}] = \varnothing$. Wegen Lemma 2.36 besitzt (h_n) eine Teilfolge (h_{n_k}), die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion h konvergiert. Es gilt $f_n = a_n \cdot (h_n^2 + 1)$ mit $|a_n| = r_n \leq 2$; deshalb hat auch (f_n) eine Teilfolge $(f_{\tilde{n}_k})$, die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Wegen $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) = 1$ ist $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Weil die f_n injektiv sind, ist f wegen dem „nullstellenzählenden Integral“ entweder injektiv oder konstant; hier kann f jedoch wegen $f'(0) = 1$ nicht konstant sein. Also ist $f \in \mathcal{F}$. □

Beweis des Satzes von Koebe (Satz 2.35). Wir verwenden eine ähnliche Beweisidee, wie sie häufig auch für den Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli verwendet wird. Es sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{F}$ gegeben. Zu zeigen ist, dass es eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) gibt, die auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ konvergiert.

Wir wählen eine dichte Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in G, zum Beispiel kann (x_m) eine Abzählung von $G \cap \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ sein. Weil nach Lemma 2.36 insbesondere für jedes $x \in G$ eine Teilfolge von $(f_n(x))$ gibt, die gegen ein $y \in \mathbb{C}$ konvergiert, lässt sich induktiv eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) konstruieren, so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_{n_k}(x_m))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y_m \in \mathbb{C}$ konvergiert; mehr noch: für alle $k \geq m$ gilt jeweils $|f_{n_k}(x_m) - y_m| \leq \frac{1}{k}$. Wir behaupten, dass diese Teilfolge (f_{n_k}) kompakt gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$ konvergiert.

Als „Kreiskette mit Anfangspunkt x_0“ bezeichnen wir eine endliche Folge von Kreisscheiben $B_1, \ldots, B_\ell$, so dass $x_0 \in B_1$ ist, und jeweils $\bar{B}_j \subset G$, $B_j \cap B_{j+1} \neq \varnothing$ und $B_j \cap B_{\tilde{j}} = \varnothing$ für $\tilde{j} \neq j, j+1$ gilt. Lemma 2.37 gilt offensichtlich *mutatis mutandis* für beliebige Kreisscheiben an Stelle von $\mathbb{D}$, und daher auch für Kreisketten mit Anfangspunkt x_0. Wegen der Konstruktion der Teilfolge (f_{n_k}) gilt dabei die Aussage des Lemmas jeweils für diese feste Teilfolge, unabhängig von der Wahl der Kreiskette, d.h. auf jeder Kreiskette konvergiert (f_{n_k}) gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$.

Ist nun eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subset G$ gegeben, so kann diese durch endlich viele Kreisketten mit Anfangspunkt x_0 überdeckt werden. Daher konvergiert (f_{n_k}) auch auf K gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$. □

Die folgende Aussage ist eine Anwendung des Satzes von Koebe auf Riemannsche Flächen (statt auf Gebiete in $\mathbb{C}$):

2.38 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine „Ausschöpfung“ von X durch offene, zusammenhängende Mengen U_n, d.h. es gilt

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots \quad \text{und} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X\,.$$

Weiter gebe es jeweils eine biholomorphe Abbildung f_n von U_n auf ein Gebiet $G_n \subset \mathbb{C}$. Dann gibt es auch eine biholomorphe Abbildung $f : X \to G$ auf ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $U_1 \neq \varnothing$. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in U_1$ und eine holomorphe Karte $(\tilde{U}_1, z)$ von X mit $\tilde{U}_1 \subset U_1$ und $z(x_0) = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es jeweils eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, so dass für die biholomorphe Funktion

$$g_n(x) = a_n \cdot f_n(x) + b_n$$

gilt:

$$g_n(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}z}(x_0) = 1 \, .$$

(Es gilt nämlich $\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}z}(x_0) \neq 0$, und deshalb ist $a_n = \left(\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}z}(x_0)\right)^{-1}$ und $b_n = -a_n \cdot f_n(x_0)$.)

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir betrachten für $n \geq 1$ die injektiven holomorphen Funktionen $h_n := g_{m+n} \circ g_m^{-1}$, die das Gebiet $V_m := g_m[U_m] \subset \mathbb{C}$ jeweils auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ abbilden. Offensichtlich gilt

$$0 \in V_m \, , \quad h_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad h_n'(0) = 1 \, .$$

Der Satz von Koebe (Satz 2.35) zeigt deshalb, dass es eine Teilfolge (h_{n_k}) der (h_n) gibt, die auf V_m kompakt gleichmäßig gegen eine injektive, holomorphe Funktion konvergiert. Wir setzen $\tilde{g}_n = g_n$ für $n \leq m$ und $\tilde{g}_n = h_{n_{n-m}}$ für $n > m$.

Wir schließen nun induktiv: Wir führen die Konstruktion des obigen Absatzes zunächst mit $m = 1$ aus, und ersetzen dann die Folge (g_n) durch $(\tilde{g}_n)$. So erhalten wir eine auf U_1 kompakt gleichmäßig konvergente Folge (g_n). Nachdem die Konstruktion für $1, \dots, m-1$ durchgeführt wurde, führen wir sie für m durch, und ersetzen wieder (g_n) durch $(\tilde{g}_n)$, so dass wir Konvergenz von U_m haben. Induktiv erhalten wir eine Funktionenfolge (g_n), die auf ganz $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m = X$ gegen eine biholomorphe Abbildung f konvergiert. □

Mit dem folgenden Satz beweisen wir schon die erste „Hälfte“ des großen Riemannschen Abbildungssatzes:

2.39 Satz. Jede kompakte planare Riemannsche Fläche X ist biholomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Wir wählen eine Koordinatenumgebung von X und darin eine zu $\mathbb{D}$ biholomorphe, offene Teilmenge $D \subset X$. Wir identifizieren wieder D mit $\mathbb{D}$. Weiter wählen wir $a, b \in D$ mit $a \neq b$ und betrachten für (hinreichend großes) $n \in \mathbb{N}$ die offene, zusammenhängende Menge $U_n = X \setminus (B(a, \frac{1}{n}) \cup B(b, \frac{1}{n}))$. Damit gilt offenbar $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \{a, b\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Anulus-Satz (Satz 2.30) eine biholomorphe Abbildung f_n von U_n auf ein Gebiet (nämlich einen Anulus) in $\mathbb{C}$. Nach Aussage 2.38 existiert daher eine injektive holomorphe Abbildung $f : X \setminus \{a, b\} \to \mathbb{C}$.

Wir zeigen, dass sich f in a bzw. b zu einer injektiven meromorphen Funktion $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt: Ist f in der Nähe von a beschränkt, so lässt sich f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz in a zu einer holomorphen Funktion fortsetzen. Ist f in der Nähe von a nicht beschränkt, so kann f bei a keine wesentliche Singularität haben: dies folgt aus dem Satz von Casorati-Weierstraß wegen der Injektivität von f. Also hat f bei a dann einen Pol. Wegen der Injektivität von f muss dieser Pol von erster Ordnung sein. Also lässt sich f durch $f(a) = \infty$ in a meromorph fortsetzen. Dieselben Argumente treffen natürlich auch auf b zu. So erhalten wir eine meromorphe Funktion $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$. Weil diese in einer Umgebung von a bzw. b alle Werte aus einem kleinen Ball um $f(a)$ bzw. $f(b)$ annimmt, ist die fortgesetze Funktion f weiterhin injektiv. Ihr Bild $f[X]$ ist einerseits nach dem Offenheitssatz offen in $\widehat{\mathbb{C}}$, andererseits mit X kompakt und deshalb abgeschlossen in $\widehat{\mathbb{C}}$. Also folgt $f[X] = \widehat{\mathbb{C}}$, und somit ist $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ biholomorph. □

Wir arbeiten jetzt nur noch am Riemannschen Abbildungssatz für nicht-kompakte, planare Riemannsche Flächen X.

2.40 Lemma. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann existiert eine Ausschöpfung $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X durch offene Mengen O_n (d.h. es gilt $O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset \dots$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$) mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\bar{O}_n$ ist kompakt, und die Zusammenhangskomponenten von ∂O_n besitzen einen „Kragen", letzteres bedeutet: Für jede Zusammenhangskomponente B von ∂O_n gibt es einen Homöomorphismus, der eine Umgebung von B in O_n auf $S^1 \times (0,1)$ und B auf $S^1 \times \{1\}$ abbildet.

(b) ∂O_n besitzt in allen seinen Punkten eine Barriere.

Beweis. Wie schon im Beweis des Satzes 1.18 über die Zerlegung der Eins verwenden wir, dass es eine abzählbare, offene Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X durch Kartenumgebungen U_n zu holomorphen Karten ϕ_n gibt, die so beschaffen sind, dass die Bilder $\phi_n[U_n] = B(0, r_n)$ Bälle von gewissen Radien $r_n > 0$ sind, dass aber umgekehrt schon $(\phi_n^{-1}[B(0, r_n/2)])_{n\in\mathbb{N}}$ ganz X überdeckt. Wir werden zeigen, dass mit einer geeigneten Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Radien mit $0 < \frac{r_n}{2} \leq R_n < r_n$ die offenen Mengen

$$O_n = \bigcup_{k=1}^{n} \phi_k^{-1}[B(0, R_k)] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

die geforderten Eigenschaften erfüllt. Jedenfalls ist (O_n) offensichtlich eine Ausschöpfung von X und $\bar{O}_n$ ist jeweils kompakt.

Um die Barrieren-Bedingung zu erfüllen, wählen wir die Radien R_n induktiv aus. Seien also die Radien $R_1, \dots, R_n$ bereits gewählt. Wir wählen den Radius $R_{n+1} \in (\frac{r_{n+1}}{2}, r_{n+1})$ so aus, dass der Rand $\partial\phi_{n+1}^{-1}[\overline{B(0, R_{n+1})}]$ die Ränder der vorherigen Mengen $\partial\phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \dots, \partial\phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$ (bezüglich einer beliebigen Karte) transversal schneidet. Dies führt einerseits dazu, dass O_{n+1} die Bedingung aus Lemma 2.27 erfüllt, und deshalb in jedem Randpunkt eine Barriere besitzt. Andererseits folgt, dass jede Zusammenhangskomponente von ∂O_{n+1} einen Kragen besitzt.

Die Realteile der logarithmischen Koordinaten $\ln(\phi_{n+1})$ sind die Logarithmen der Abstände zu $\phi_{n+1}^{-1}(0) \in U_{n+1}$. Weil der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch ist, sind die Funktionen auf den Rändern der obigen Mengen reellanalytisch. Deshalb gibt es höchstens endliche viele kritische Werte von dieser reell analytischen Funktion auf $\partial\phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \dots, \partial\phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$, und damit auch ein $\frac{r_{n+1}}{2} \leq R_{n+1} < r_{n+1}$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

2.41 Satz. Sei X eine nicht-kompakte, planare Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Beweis. Nach Lemma 2.40 gibt es eine Ausschöpfung (O_n) von X durch offene Mengen mit den dort genannten Eigenschaften. Wir zeigen, dass jedes O_n biholomorph zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Nach Aussage 2.38 ist dann auch X selbst biholomorph zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$.

Dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, dass O_n zusammenhängend ist. Weil $\bar{O}_n$ kompakt ist, ist sein Rand ∂O_n homöomorph zu S^1. Außerdem besitzt O_n einen Kragen $K \subset X$, dieser ist homöomorph zu $S^1 \times [0,1)$, wobei $\partial O_n \subset K$ der Teilmenge $S^1 \times \{0\}$ entspricht. Nach dem Anulus-Satz in der Version von Korollar 2.33 existiert eine biholomorphe Abbildung g von K auf einen Anulus $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$ mit einem geeigneten $R > 1$. Dabei kann g so gewählt werden, dass $g[\partial O_n] = \partial \mathbb{D}$ ist. Weil O_n in jedem Randpunkt eine Barriere besitzt, ist nach Satz 2.26 das Dirichlet-Problem zu $u|_{\partial O_n} = \mathrm{Re}(g)|_{\partial O_n}$ lösbar, d.h. es existiert eine Funktion $u : \bar{O}_n \to \mathbb{R}$, so dass $u|_{O_n}$ harmonisch ist und $u|_{\partial O_n} = \mathrm{Re}(g)|_{\partial O_n}$ gilt. Weil X planar ist, besitzt die geschlossene 1-Form $\mathrm{d}u + i * \mathrm{d}u$ eine Stammfunktion $f : \bar{O}_n \to \mathbb{C}$, und diese ist nach Aufgabe 2.32(c) holomorph. Dabei kann die Integrationskonstante für f so gewählt werden, dass f eine Fortsetzung von g ist, und deshalb $f[\partial O_n] = \partial \mathbb{D}$ ist. Die Funktion $|f|$ nimmt ihr Maximum auf ∂O_n an, also gilt $|f| \leq 1$. Wegen des Satzes von der Gebietstreue gilt damit $f[O_n] \subset \mathbb{D}$. Somit bildet f das Gebiet O_n biholomorph auf ein Gebiet in $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ ab. □

Der Riemannsche Abbildungssatz zählt in den Worten von Felix Klein zu den tiefsten und größten Erkenntnissen, die in der Mathematik je erwachsen sind. Jetzt ist es endlich soweit:

2.42 Theorem. Für eine Riemannsche Fläche X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Jede geschlossene, glatte 1-Form auf X ist exakt.

(b) X ist entweder biholomorph zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zu $\mathbb{C}$, oder zu $\mathbb{D}$.

(c) X ist einfach zusammenhängend.

Beweis. Zu (a) $\Longrightarrow$ (b). Eine Riemannsche Fläche X, die (i) erfüllt, ist insbesondere planar. Ist X kompakt, so ist X nach Satz 2.39 biholomorph zu $\widehat{\mathbb{C}}$. Ist X nicht kompakt, so ist X nach Satz 2.41 biholomorph zu einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Ist $G \neq \mathbb{C}$, so ist nach dem „kleinen“ Riemannschen Abbildungssatz (Theorem B.1) G und damit X biholomorph zu $\mathbb{D}$.

Zu (b) $\Longrightarrow$ (c). Da $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ einfach zusammenhängend sind, ist auch jede Riemannsche Fläche, die zu einem dieser Gebiete biholomorph ist, einfach zusammenhängend.

Zu (c) $\Longrightarrow$ (a). Wir können jede Homotopie auf einer Riemannschen Fläche aus endlich vielen Homotopien innerhalb des Definitionsbereichs einer Karte zusammensetzen. Deshalb gilt der Monodromiesatz auch auf Riemannschen Flächen. Insbesondere ist auf einer einfach zusammenhängendend Riemannschen Fläche X jede geschlossene 1-Form exakt. □

2.9 Der Uniformisierungssatz

Als direkte Folge des großen Riemannschen Abbildungssatzes erhalten wir nun auch eine ziemlich weitgehende Übersicht über alle (auch nicht einfach zusammenhängende) Riemannsche Flächen. Dies ist der sogenannte *Uniformisierungssatz*.

2.43 Theorem. (Uniformisierungssatz.) Jede Riemannsche Fläche X gehört zu einer der folgenden Klassen:

(a) X ist biholomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X ist biholomorph zu $\mathbb{C}$. In diesem Fall ist X selbst biholomorph zu einer der folgenden Riemannschen Flächen:

 (i) $\mathbb{C}$
 (ii) $\mathbb{C}^*$
 (iii) ein komplexer Torus $\mathbb{C}/\Gamma$, siehe Beispiele 1.28(c) und 1.34.

(c) Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X ist biholomorph zu $\mathbb{D}$. In diesem Fall ist X biholomorph zu einer Riemannschen Fläche $\mathbb{D}/\Gamma$, wobei Γ eine auf $\mathbb{D}$ frei operierende Untergruppe der Automorphismengruppe

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) &= \left\{ z \mapsto e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0\, z} \,\middle|\, \varphi \in \mathbb{R},\ z_0 \in \mathbb{D} \right\} \\ &= \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}\end{aligned}$$

ist.

Ein Wermutstropfen bleibt bei diesem schönen Ergebnis: Es ist leider nicht möglich, die auf $\mathbb{D}$ frei operierenden Untergruppen Γ in ähnlicher Weise explizit anzugeben, wie wir das für die auf $\mathbb{C}$ frei operierenden Untergruppen in Abschnitt 1.5 getan haben. Es ist aber nicht verwunderlich, dass dieser Fall kompliziert ist: alle kompakten, orientierbaren, zusammenhängenden, reell-2-dimensionale Flächen können als Riemannsche Flächen aufgefasst werden, und ist ihr Geschlecht ≥ 2, so ist ihre universelle Überlagerung biholomorph zu $\mathbb{D}$. Alle diese Flächen gehen also aus dem Fall (c) des Uniformisierungssatzes hervor.

Beweis des Uniformisierungssatzes Theorem 2.43. Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung der gegebenen Riemannschen Fläche X. Sie existiert nach Satz 1.45 und ist wegen Korollar 1.44 bis auf biholomorphe Äquivalenz eindeutig. Sei Γ die Gruppe der Decktransformationen von π; sie ist eine Untergruppe der biholomorphen Abbildungen $\tilde{X} \to \tilde{X}$, die nach Satz 1.37(a) auf $\tilde{X}$ frei operiert. Die Überlagerung π ist nach Aufgabe 1.35(b) regulär. Deshalb ist nach Satz 1.37(c) die Riemannsche Fläche X biholomorph äquivalent zu $\tilde{X}/\Gamma$.

Die Riemannsche Fläche $\tilde{X}$ ist wegen der Definition der universellen Überlagerung einfach zusammenhängend. Nach dem großen Riemannschen Abbildungssatz (Theorem 2.42) ist $\tilde{X}$ entweder zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zu $\mathbb{C}$ oder zu $\mathbb{D}$ biholomorph äquivalent.

Ist $\tilde{X}$ zu $\widehat{\mathbb{C}}$ biholomorph äquivalent, so gilt $\Gamma = \{\mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}\}$ nach Aussage 1.41. Also liegt der Fall (a) vor.

Ist $\tilde{X}$ zu $\mathbb{C}$ biholomorph äquivalent, so hat Γ eine der drei Formen (T), (Z), (E) aus Aussage 1.39. Nach der Diskussion, die in Abschnitt 1.5 auf Aussage 1.39 folgt, entsprechen diese drei Fällen jeweils komplexen Tori, der punktierten Ebene $\mathbb{C}^*$ und der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, und somit den Fällen (b)(iii), (b)(ii), (b)(i) aus dem Uniformisierungssatz.

Es bleibt der Fall, dass $\tilde{X}$ zu $\mathbb{D}$ biholomorph äquivalent ist. Nach Korollar B.3 ist die Automorphismengruppe von $\mathbb{D}$ tatsächlich wie in (c) angegeben, und deshalb liegt nach dem zuvor gesagten der Fall (c) aus dem Uniformisierungssatz vor. □