Kapitel 1

Riemannsche Flächen

1.1 Riemannschen Flächen und holomorphe Abbildungen

Gegenstand der Vorlesung sind Riemannsche Flächen, also 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten. Wir beginnen daher, indem wir die (vielleicht aus der Analysis-Vorlesung bekannte) Definition der (reellen) Mannigfaltigkeit auf 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten übertragen.

1.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum.

(a) Eine (1-dimensionale) *komplexe Karte [complex (coordinate) chart]* von X ist ein Paar (U, φ) aus einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einem Homöomorphismus φ von U auf eine offene Teilmenge $U' = \varphi[U] \subset \mathbb{C}$.

(b) Zwei Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) von X heißen *holomorph verträglich [holomorphically compatible]*, wenn $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ ist, oder wenn im Fall $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ der *Koordinatenwechsel [transition function]*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1[U_1 \cap U_2]} : \varphi_1[U_1 \cap U_2] \to \varphi_2[U_1 \cap U_2]$$

biholomorph ist, d.h. der Koordinatenwechsel ist bijektiv und eine holomorphe Abbildung von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, und die Umkehrabbildung

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2[U_1 \cap U_2]} : \varphi_2[U_1 \cap U_2] \to \varphi_1[U_1 \cap U_2]$$

ist ebenfalls holomorph.

(c) Ein *holomorpher Atlas [holomorphic atlas]* für X ist eine Familie $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ von paarweise holomorph verträglichen Karten auf X, so dass $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

(d) Ein holomorpher Atlas $\mathfrak{A}$ heißt *maximal [maximal]*, wenn für jede komplexe Karte (U, φ) von X, die mit allen Karten aus $\mathfrak{A}$ verträglich ist, schon $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ gilt.

Holomorphe Verträglichkeit ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge der komplexen Karten eines topologischen Raums X. Deshalb kann jeder holomorphe Atlas $\mathfrak{A}$ von X zu einem maximalen Atlas $\widetilde{\mathfrak{A}}$ erweitert werden, indem man alle zu den Karten in $\mathfrak{A}$ verträglichen Karten von X zu $\mathfrak{A}$ hinzunimmt.

1.2 Definition. Ein topologischer Raum X hat eine *abzählbare Basis der Topologie [countable basis of the topology]*, wenn es eine höchstens abzählbare Familie $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von in X offenen Mengen gibt, so dass für jede weitere offene Menge U von X und jedes $x \in U$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k \subset U$ gibt. Eine jede derartige Familie (U_k) heißt *Basis der Topologie [basis of the topology]* von X.

1.3 Definition. Eine *Riemannsche Fläche [Riemann surface]* ist ein wegzusammenhängender, metrisierbarer, hausdorffscher topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, zusammen mit einem maximalen holomorphen Atlas.

Wenn von einer Karte einer Riemannschen Fläche die Rede ist, ist immer eine Karte aus ihrem maximalen Atlas gemeint.

1.4 Bemerkungen. (a) Weil jeder komplexe Atlas zu einem maximalen komplexen Atlas erweitert werden kann, kann man einen wegzusammenhängenden, metrisierbaren, hausdorffschen topologischen Raum X mit abzählbarer Topologie auch zu einer Riemannschen Fläche machen, indem man einen nicht-maximalen komplexen Atlas für X festlegt.

(b) Unsere Bedingung, dass Riemannsche Flächen abzählbare Basis der Topologie haben sollen, kann zu „separabel“ oder auch zu „parakompakt“ abgeschwächt werden, ohne den Begriff der Riemannschen Fläche zu verändern, d.h. für einen wegzusammenhängenden, metrisierbaren, hausdorffschen topologischen Raum X, für den ein holomorpher Atlas existiert, gilt:

$$X \text{ hat abzählbare Basis der Topologie} \iff X \text{ ist separabel} \iff X \text{ ist parakompakt.}$$

Außerdem folgt die Metrisierbarkeit von X aus den anderen Eigenschaften.

Wir fordern diese „starken“ topologischen Eigenschaften für Riemannsche Flächen hier, um auf möglichst wenig Resultate aus der mengentheoretischen Topologie zurückgreifen zu müssen.

1.5 Beispiele. (a) Jedes Gebiet (zusammenhängende, offene Teilmenge) $G \subset \mathbb{C}$ ist offenbar eine Riemannsche Fläche, denn $\{(G, \mathrm{id}_G)\}$ ist ein komplexer Atlas für G.

(b) Die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird als *Riemannsche Zahlenkugel [Riemann sphere]* bezeichnet, wenn sie auf die im Folgenden beschriebene Weise als Riemannsche Fläche aufgefasst wird. Die folgende Aufgabe (a) zeigt, dass sie zur 2-dimensionalen Einheitssphäre homöomorph ist, wodurch die Bezeichnung als „Sphäre“ gerechtfertigt wird. Sie ist kompakt, und daher zu keinem Gebiet in $\mathbb{C}$ biholomorph äquivalent. Wegen der folgenden Aufgabe (b) wird sie auch mit $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ bezeichnet. Für alle künftigen Rechnungen definieren wir für jedes $z \in \mathbb{C}$:

$$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty\,, \quad \text{und für } z \neq 0 \colon \infty \cdot z = z \cdot \infty = \tfrac{z}{0} = \infty\,.$$

Die Ausdrücke $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ bleiben undefiniert.

Wir erklären zunächst eine Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ dadurch, dass wir eine Teilmenge U von $\widehat{\mathbb{C}}$ genau dann offen nennen, wenn $U \cap \mathbb{C}$ im üblichen Sinne offen in $\mathbb{C}$ ist und außerdem im Fall $\infty \in U$ es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \tfrac{1}{\varepsilon}\} \subset U$$

gilt. Offenbar wird $\widehat{\mathbb{C}}$ hierdurch zu einem Hausdorffraum. Wegen der folgenden Aufgabe (a) ist er ebenso wie $\mathbb{S}^2$ wegzusammenhängend und metrisierbar und hat eine abzählbare Basis der Topologie.

Nun definieren wir:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C}, & \varphi_1 &: U_1 \to \mathbb{C},\ z \mapsto z, \\ U_2 &= \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, & \varphi_2 &: U_2 \to \mathbb{C},\ z \mapsto \tfrac{1}{z} \end{aligned}$$

(wobei wir für die letzte Definition an unsere Setzung $\frac{1}{\infty} = 0$ erinnern). U_1 und U_2 sind offene Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$, es gilt $U_1 \cup U_2 = \widehat{\mathbb{C}}$, und die Abbildungen φ_1 und φ_2 sind Homöomorphismen. Der Koordinatenwechsel von φ_1 nach φ_2 wird durch $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$,

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto \tfrac{1}{z}$$

gegeben, was offenbar eine biholomorphe Abbildung ist. Deshalb ist $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ein holomorpher Atlas für $\widehat{\mathbb{C}}$, durch den $\widehat{\mathbb{C}}$ zu einer Riemannschen Fläche wird.

1.6 Aufgabe. (a) $\widehat{\mathbb{C}}$ is homeomorphic to $\mathbb{S}^2$ via stereographic projection.

(b) $\widehat{\mathbb{C}}$ is biholomorphic to the complex projective space $\mathbb{C}P^1$.

Zu einem „Raum“ gehören immer auch „Morphismen“, also Abbildungen, die mit der Struktur dieses Raums verträglich sind.

1.7 Definition. Seien X, Y zwei Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *holomorph [holomorphic]* bzw. *glatt [smooth]*, wenn f stetig ist und für jede Karte (U, φ) von X und jede Karte (V, ψ) von Y die Funktion

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi[U \cap f^{-1}[V]]} : \varphi[U \cap f^{-1}[V]] \to \psi[V]$$

holomorph im Sinne der Funktionentheorie I bzw. glatt im Sinne der Analysis II (also als Funktion nach $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ beliebig oft reell differenzierbar) ist.

Im Fall $V = \mathbb{C}$ spricht man auch von einer *holomorphen Funktion [holomorphic function]*.

(b) f heißt *biholomorph [biholomorphic]* oder *konform [conformal]*, wenn f ein Homöomorphismus ist, und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind.

(c) X und Y heißen *biholomorph äquivalent [biholomorphically equivalent]*, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : X \to Y$ gibt.

Die Menge der holomorphen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ wird mit $\mathcal{O}(X)$ bezeichnet. Offenbar liegen die konstanten Funktionen in $\mathcal{O}(X)$, und mit $f, g \in \mathcal{O}(X)$ gilt auch $f \pm g, f \cdot g \in \mathcal{O}(X)$. In diesem Sinn ist $\mathcal{O}(X)$ eine $\mathbb{C}$-Algebra, insbesondere ein kommutativer Ring mit Eins.

Die biholomorphen Abbildungen sind die Isomorphismen in der Kategorie der Riemannschen Flächen; zwei Riemannsche Flächen sind isomorph, wenn sie biholomorph äquivalent sind. Die folgende Aussage erleichtert den Nachweis, dass eine Abbildung biholomorph ist:

1.8 Aussage. (Satz von Osgood für Riemannsche Flächen.) Seien X , Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung. Wenn f injektiv ist, so ist $f[X]$ offen in Y , und f eine biholomorphe Abbildung auf das Bild $f[X]$.

Beweis. f ist nicht konstant, aus dem Offenheitssatz der Funktionentheorie I ergibt sich daher, dass $f[X]$ offen in Y ist. Sei nun $x \in X$ und (U, ϕ) bzw. (V, ψ) Karten von X bzw. Y um x bzw. $f(x)$. Dann ist $\tilde{f} := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ (auf geeignetem Definitionsgebiet in $\mathbb{C}$) holomorph und injektiv. Deshalb hat $\tilde{f}'$ keine Nullstellen: Hätte $\tilde{f}'$ nämlich in einem $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, etwa von Ordnung k , so wäre $\tilde{f}'$ auf einer Umgebung von z_0 eine verzweigte $(k+1)$-blättrige Überlagerung, also sicher nicht injektiv. Der Satz von der Umkehrfunktion zeigt daher, dass $\tilde{f}^{-1}$ in $\tilde{f}(\phi(x_0))$ holomorph ist. Daraus folgt, dass f^{-1} in $f(x_0)$ holomorph ist. □

Viele „lokale“ Aussagen der Funktionentheorie I lassen sich leicht auf holomorphe Funktionen im neuen Sinn übertragen. Die folgende Aufgabe gibt einige Beispiele. Wir werden derartige Aussagen im Folgenden oft ohne ausdrücklichen Beweis verwenden.

1.9 Aufgabe. Let X, Y be Riemann surfaces. Show:

(a) **Identity Theorem.** Let $f, g : X \to Y$ be two holomorphic maps, and suppose that the set $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ has an accumulation point in X . Then $f = g$ holds.

[*Hint.* Use the identity theorem from *Funktionentheorie I* to show that the set of accumulation points of A is contained in A^o .]

(b) Suppose that $f : X \to Y$ is a non-constant, holomorphic map and $y \in Y$. Then $f^{-1}[\{y\}]$ is a discrete subset of X .

(c) **Maximum and Minimum Principle for holomorphic functions.** Let $f : X \to \mathbb{C}$ be a holomorphic function. Then $|f|$ does not attain a local maximum, and if it attains a local minimum at some $x_0 \in X$, then $f(x_0) = 0$ holds.

[*Hint.* Use the analogous statement from *Funktionentheorie I.*]

(d) Suppose that X is *compact.* Then any holomorphic map $f : X \to \mathbb{C}$ is constant.

(e) Suppose that X, Y are both *compact.* Either prove or give a counterexample for the following statement: Any holomorphic map $f : X \to Y$ is constant.

(f) **Riemann's theorem on removable singularities.** Let $x_0 \in X$ and $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$ be a holomorphic map. Suppose that one of the following two statements holds:

(i) f can be extended to a continuous function $f : X \to Y$.

(ii) $Y = \mathbb{C}$ and there exists a neighbourhood U of x_0 in X so that the function $\left| f|_{U \setminus \{x_0\}} \right|$ is bounded.

Then f can be extended at x_0 to a holomorphic map $f : X \to Y$.

Die folgende Aussage zeigt, dass holomorphe Abbildungen nach $\widehat{\mathbb{C}}$ den meromorphen Funktionen der Funktionentheorie I entsprechen.

1.10 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, $x_0 \in X$ und $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f lässt sich in x_0 holomorph (oder stetig) zu einer Abbildung $\widehat{f} : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzen.

(b) Es gibt eine Karte (U, φ) von X mit $x_0 \in U$, so dass $(f|_{U \setminus \{x_0\}}) \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \setminus \{x_0\}] \to \mathbb{C}$ in x_0 meromorph im Sinne der Funktionentheorie I ist.

(c) Es existiert eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$, und eine Karte (U, φ) von X mit $x_0 \in U$, so dass die Funktion
$$(z - z_0)^{-n} \cdot \big((f|_{U \setminus \{x_0\}}) \circ \varphi^{-1} \big) \ : \ \varphi[U \setminus \{x_0\}] \to \mathbb{C}$$
in $z = z_0 := \varphi(x_0)$ durch einen Wert in $\mathbb{C}^*$ holomorph (oder stetig) fortgesetzt werden kann.

Gelten diese Aussagen, so wird die Funktion f mit ihrer Fortsetzung $\widehat{f}$ aus (a) identifiziert. In diesem Fall ist die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ aus (c) eindeutig bestimmt. Sie heißt die *Ordnung [order]* von f in x_0 und wird mit $\mathrm{ord}_{x_0}(f)$ bezeichnet. Ist $n = \mathrm{ord}_{x_0}(f) > 0$, so gilt $f(x_0) = 0$ und man sagt, dass f in x_0 eine *Nullstelle n-ter Ordnung [zero, root of n-th order]* besitzt. Ist $n = \mathrm{ord}_{x_0}(f) < 0$, so gilt $f(x_0) = \infty$ und man sagt, dass f in x_0 eine *Polstelle $(-n)$-ter Ordnung [pole of $(-n)$-th order]* besitzt. Ist $\mathrm{ord}_{x_0}(f) = 0$, so gilt $f(x_0) \in \mathbb{C}^*$.

Wegen der vorangehenden Aussage nennen wir holomorphe Abbildungen $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ einer Riemannschen Fläche X auch *meromorphe Funktionen* auf X. Den Raum der meromorphen Funktionen auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(X)$. Für $f, g \in \mathcal{M}(X)$ gilt $f \pm g, f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$ sowie für $g \neq 0$ auch $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)$. Deshalb ist $\mathcal{M}(X)$ ein Körper, und zwar der Quotientenkörper des Integritätsrings $\mathcal{O}(X)$. Außerdem gilt für $x_0 \in X$
$$\mathrm{ord}_{x_0}(f \cdot g) = \mathrm{ord}_{x_0}(f) + \mathrm{ord}_{x_0}(g) \quad \text{und} \quad \mathrm{ord}_{x_0}(\tfrac{f}{g}) = \mathrm{ord}_{x_0}(f) - \mathrm{ord}_{x_0}(g)\ .$$

Beweis von Aussage 1.10. Die Äquivalenz der Holomorphie und Stetigkeit ergibt sich in (a) aus der Version des Riemannschen Hebbarkeitssatzes aus Aufgabe 1.9, in (c) aus dem klassischen Riemannschen Hebbarkeitssatz. Wir wählen nun eine Karte (U, φ) von X mit $x_0 \in U$, und betrachten die Funktion $\widetilde{f} := (f|_{U \setminus \{x_0\}}) \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \setminus \{x_0\}] \to \mathbb{C}$, die im Sinne der Funktionentheorie I holomorph ist. Diese Funktion ist genau dann in $\varphi(x_0)$ holomorph fortsetzbar, wenn f in x_0 holomorph fortsetzbar ist. Die Äquivalenz der Aussagen (a)⇔(b)⇔(c), und auch die weiteren Aussagen ergeben sich deshalb aus den entsprechenden Ergebnissen der Funktionentheorie I. □

1.2 Differentialformen

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialformen auf Riemannschen Flächen, und zwar glatte oder holomorphe 1-Formen und 2-Formen. Wir verwenden Differentialformen einerseits, um die Ableitungen von holomorphen bzw. glatten Funktionen auf Riemannschen Flächen karteninvariant zu definieren, andererseits benötigen wir sie als Objekte für die Integration auf Riemannschen Flächen.

Von nun an bezeichnen wir Karten von Riemannschen Flächen X oft mit (U, z) (statt (U, φ)), um Anschluss an suggestivere Bezeichnungen zu haben.

Wir wollen für glatte (insbesondere für holomorphe) Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ eine Ableitung definieren. Zunächst arbeiten wir bezüglich einer Karte (U, z) von X. Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z) : U \to \mathbb{R}$. Die Funktion $(f \circ z^{-1}) : z(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ können wir dann im Sinne der Analysis bzw. der Funktionentheorie I differenzieren. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial (f \circ z^{-1})}{\partial x} \circ z : U \to \mathbb{C}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial (f \circ z^{-1})}{\partial y} \circ z : U \to \mathbb{C}$ definieren, und hierdurch die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) .$$

(Warum diese Definition, insbesondere, warum steht das Minuszeichen an dieser Stelle? Eine Begründung ist, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen besagen, dass $f|U$ genau dann holomorph ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ist, und ist dies der Fall, so stimmt $\frac{\partial f}{\partial z}$ mit der komplexen Ableitung von $f \circ z^{-1}$ im Sinne der Funktionentheorie I überein.*)

Das Problem mit diesen partiellen Ableitungen ist, dass sie nicht „invariant“ sind, das heißt, dass sie von der Wahl der Karte X abhängen. Ausführlicher gesagt: Wenn (z, U) und $(\tilde{z}, \tilde{U})$ zwei verschiedene Karten von X mit $U \cap \tilde{U} \neq \varnothing$, so stmmen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}}$ auf $U \cap \tilde{U}$ im Allgemeinen nicht überein, dasselbe gilt für die $\bar{z}$-Ableitungen. Stattdessen haben sie das folgend beschriebene *Transformationsverhalten*: Die Kartenwechselabbildung $\tilde{z} \circ z^{-1} : z[U \cap \tilde{U}] \to \tilde{z}[U \cap \tilde{U}]$ ist biholomorph, deshalb gilt $\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\bar{z}} = 0$, die Ableitung $\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}z}$ ist auf $U \cap \tilde{U}$ holomorph und nullstellenfrei, und wegen der Kettenregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tilde{z}} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}z} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\bar{z}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\bar{\tilde{z}}} \cdot \overline{\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}z}\right)} \quad \text{auf } U \cap \tilde{U} . \tag{$*$}$$

Wir können als „invariante“ Ableitung von f die Gesamtheit aller Paare von Ableitungen $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\bar{z}}\right)$, d.h. die Familie

$$\mathrm{d}f = \left\{ \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\bar{z}}\right) \middle| (U, z) \in \mathfrak{A} \right\} \tag{$\dagger$}$$

zusammen mit den Transformationsformeln $(*)$ auffassen. Wir verwenden diese Transformationsformeln nun als „Vorbild“ zur Definition von Differentialformen, genauer: von 1-Formen.

1.11 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche mit dem maximalen Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

(a) Eine glatte bzw. holomorphe bzw. meromorphe *Differentialform vom Grad 0* oder kurz *0-Form* [differential form of degree 0, 0-form] ist eine Familie $f = (f_\alpha)_{\alpha \in A}$ von glatten bzw. holomorphen bzw. meromorphen Funktionen f_α auf U_α, so dass für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ die *Transformationsformel*

$$f_\alpha = f_\beta \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

gilt. Wir bezeichnen den Raum der glatten 0-Formen mit $C^\infty(X) = \Omega^1(X) = \mathcal{A}^{0,0}(X)$.

*Es gibt noch eine andere, formalere Begründung: Ist X ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $z = \mathrm{id}$ die kanonische globale Karte, so kann man $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ als 1-Formen (Projektionen in Richtung der Koordinatenachsen), und $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ als Vektorfelder (in Richtung der Koordinatenachsen) interpretieren. Dann gilt $\mathrm{d}x(\frac{\partial}{\partial x}) = \mathrm{d}y(\frac{\partial}{\partial y}) = 1$ und $\mathrm{d}x(\frac{\partial}{\partial y}) = \mathrm{d}y(\frac{\partial}{\partial x}) = 0$. Mit $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$, und den obigen Definitionen für $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ gilt daher $\mathrm{d}z(\frac{\partial}{\partial z}) = \mathrm{d}\bar{z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 1$ und $\mathrm{d}z(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = \mathrm{d}\bar{z}(\frac{\partial}{\partial z}) = 0$. Mit andern Worten, $(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$ ist eine duale Basis der Vektoren zur Basis $(\mathrm{d}z, \mathrm{d}\bar{z})$ der 1-Formen. Später werden wir sehen, dass sich diese Begründung auf Differentialformen auf allgemeinen Riemannschen Flächen überträgt.

(b) Eine glatte bzw. holomorphe bzw. meromorphe *Differentialform vom Grad 1* oder kurz *1-Form* [differential form of degree 1, 1-form] ist eine Familie $\omega = ((\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2}))_{\alpha \in A}$ von Paaren $(\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2})$ von glatten bzw. holomorphen bzw. meromorphen Funktionen auf U_α, so dass für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ die *Transformationsformeln*

$$\omega_{\alpha,1} = \omega_{\beta,1} \cdot \frac{\mathrm{d}z_\beta}{\mathrm{d}z_\alpha} \quad \text{und} \quad \omega_{\alpha,2} = \omega_{\beta,2} \cdot \overline{\left(\frac{\mathrm{d}z_\beta}{\mathrm{d}z_\alpha}\right)} \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

gelten. Wir bezeichnen den Raum der glatten 1-Formen mit $\Omega^1(X)$.

Merkregel für die Transformationsformeln. $\omega_{\alpha,1}(z_\alpha)\,\mathrm{d}z_\alpha$ und $\omega_{\alpha,2}(z_\alpha)\,\mathrm{d}\bar{z}_\alpha$ sind „invariant“, d.h. von $\alpha \in A$ unabhängig.

Wir sagen, dass $\omega \in \Omega^1(X)$ *vom Typ (1,0) bzw. vom Typ (0,1) ist* [is of type (1,0), (0,1)], wenn für alle $\alpha \in A$ gilt: $\omega_{\alpha,2} = 0$ bzw. $\omega_{\alpha,1} = 0$. Wir bezeichnen den Raum der glatten 1-Formen vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ mit $\mathcal{A}^{1,0}(X)$ bzw. mit $\mathcal{A}^{0,1}(X)$. Dadurch ergibt sich eine Zerlegung als direkte Summe $\Omega^1(X) = \mathcal{A}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(X)$.

(c) Eine glatte bzw. holomorphe bzw. meromorphe *Differentialform vom Grad 2* oder kurz *2-Form* [differential form of degree 2, 2-form] ist eine Familie $\psi = (\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von glatten bzw. holomorphen bzw. meromorphen Funktionen ψ_α auf U_α, so dass für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ die *Transformationsformel*

$$\psi_\alpha = \psi_\beta \cdot \frac{\mathrm{d}z_\beta}{\mathrm{d}z_\alpha} \cdot \overline{\left(\frac{\mathrm{d}z_\beta}{\mathrm{d}z_\alpha}\right)} \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

gilt. Wir bezeichnen den Raum der glatten 2-Formen mit $\Omega^2(X) = \mathcal{A}^{1,1}(X)$.

Merkregel für die Transformationsformel. $\omega_\alpha(z_\alpha)\,\mathrm{d}z_\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}_\alpha$ ist „invariant“, d.h. von $\alpha \in A$ unabhängig.

Zur Definition einer Differentialform braucht man nicht den maximalen Atlas von X, es genügt, die Funktionen bzw. Paare von Funktionen für die Karten in irgendeinem verträglichen Atlas von X anzugeben. Differentialformen vom Grad 0 entsprechen offenbar globalen Funktionen auf X.

1.12 Beispiele. Sei X eine Riemannsche Fläche.

(a) Sind φ_1, φ_2 Differentialformen vom selben Grad $k \in \{0,1,2\}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, so definieren wir $\varphi_1 + \varphi_2$ und $f \cdot \varphi_1$ „komponentenweise“, d.h. durch Wirkung auf die einzelnen Funktionen bzw. Paare von Funktionen. Auf diese Weise ergeben sich wieder Differentialformen vom Grad k.

Ist außerdem $U \subset X$ eine offene Menge, so kann man aus einer Differentialform φ auf X durch Einschränkung aller Einzelfunktionen auf U eine Differentialform $\varphi|_U$ auf U erhalten.

(b) Ist $f : X \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, so ist das durch (†) definierte $\mathrm{d}f$ eine glatte Differentialform vom Grad 1 auf X. Ist f holomorph bzw. meromorph, so ist $\mathrm{d}f$ eine holomorphe bzw. meromorphe Differentialform vom Grad 1 und Typ (1,0) auf X. Für zwei glatte Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ gilt die Summen- und die Produktregel:

$$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g \quad \text{und} \quad \mathrm{d}(f \cdot g) = f \cdot \mathrm{d}g + g \cdot \mathrm{d}f\,.$$

(c) Für Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ und holomorphe Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{d}f = f'(z)\,\mathrm{d}z$, wenn wir mit $z = \mathrm{id}_G$ die kanonische globale Karte für G bezeichnen.

(d) Ist $\omega = ((\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2}))_{\alpha \in A} \in \Omega^1(X)$, so gilt für jedes $\alpha \in A$: $\omega|_{U_\alpha} = \omega_{\alpha,1}\,\mathrm{d}z_\alpha + \omega_{\alpha,2}\,\mathrm{d}\bar{z}_\alpha$. Dabei wird auf der linken Seite dieser Gleichung die Einschränkung auf natürliche Weise auf die einzelnen Funktionen $\omega_{\alpha,\nu}$ angewendet, und auf der rechten Seite stehen die Differentiale der Funktionen z_α und $\bar{z}_\alpha$ im Sinn der Definition (†). Wir werden künftig 1-Formen häufig in dieser Form angeben, wobei wir den Index $_\alpha$ sowie die Beschränkung auf U_α weglassen, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Deshalb hat eine 1-Form ω genau dann den Typ (1,0) bzw. (0,1), wenn sie von der Gestalt $\omega = \omega_\alpha\,\mathrm{d}z$ bzw. $\omega = \omega_\alpha\,\mathrm{d}\bar{z}$ ist.

Insbesondere gilt für eine glatte Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ in diesem Sinne

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}\,.$$

Ist f holomorph oder meromorph, so vereinfacht sich diese Darstellung zu

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,.$$

1.13 Aufgabe. Prove the above rules, and all others that may be needed.

1.14 Aufgabe. The wedge product. Let X be a Riemann surface, with atlas $\{(U_\alpha, z_\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

(a) Let two differential 1-forms $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^1(X)$ be given, say $\omega = ((\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2}))_{\alpha \in A}$ and $\tilde{\omega} = ((\tilde{\omega}_{\alpha,1}, \tilde{\omega}_{\alpha,2}))_{\alpha \in A}$. For $\alpha \in A$ we define the functions

$$\psi_\alpha = \omega_{\alpha,1} \cdot \tilde{\omega}_{\alpha,2} - \tilde{\omega}_{\alpha,1} \cdot \omega_{\alpha,2}\,.$$

Show that $\psi := (\psi_\alpha)_{\alpha \in A} \in \Omega^2(X)$ holds. This 2-form ψ is called the *wedge product* [Dachprodukt] of ω and $\tilde{\omega}$, and is denoted by $\omega \wedge \tilde{\omega}$. Moreover, show that $\tilde{\omega} \wedge \omega = -\omega \wedge \tilde{\omega}$ holds.

(b) Let a differential 2-form $\psi = (\psi_\alpha)_{\alpha \in A} \in \Omega^2(X)$ be given. Show that for every $\alpha \in A$ we have the local representation

$$\psi|_{U_\alpha} = \psi_\alpha \cdot (\mathrm{d}z_\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}_\alpha)\,.$$

Wir definieren für glatte Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ darüber hinaus die Zerlegung von $\mathrm{d}f$ im Sinne der direkten Summe $\Omega^1(X) = \mathcal{A}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(X)$, d.h. die „partiellen" Differentialoperatoren

$$\mathrm{d}'f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \mathrm{d}''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}\,.$$

Damit gilt also $\mathrm{d}'f \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$, $\mathrm{d}''f \in \mathcal{A}^{0,1}(X)$ und $\mathrm{d}f = \mathrm{d}'f + \mathrm{d}''f$. Die Ableitung $\mathrm{d}'f$ bzw. $\mathrm{d}''f$ heißt die *holomorphe Ableitung* bzw. *anti-holomorphe Ableitung* von f. Diese Bezeichnungen werden durch den Sachverhalt der folgenden Aufgabe begründet:

1.15 Aufgabe. Let $f : X \to \mathbb{C}$ be a smooth function on a Riemann surface X. Then f is holomorphic if and only if $\mathrm{d}''f = 0$. If this is the case, then $\mathrm{d}'f$ corresponds to the usual complex derivative of f, more precisely: For any chart (U, z) of X we have $\mathrm{d}'f|_U = (f \circ z^{-1})'\,\mathrm{d}z$, where on the right-hand side of the equation, $'$ denotes the usual complex derivative in the sense of Funktionentheorie I.

Wir erweitern die Differentialoperatoren d, d', d'' für 1-Formen $\omega \in \Omega^1(X)$, und zwar indem wir für $\omega = \omega_1\,\mathrm{d}z + \omega_2\,\mathrm{d}\bar{z}$ mit glatten Funktionen ω_1, ω_2 definieren:

$$\mathrm{d}'(\omega_1\,\mathrm{d}z+\omega_2\,\mathrm{d}\bar{z}) = \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\,(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z})\,, \quad \mathrm{d}''(\omega_1\,\mathrm{d}z+\omega_2\,\mathrm{d}\bar{z}) = -\frac{\partial\omega_1}{\partial\bar{z}}\,(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}'\omega+\mathrm{d}''\omega\,.$$

Aus formalen Gründen setzen wir außerdem für jedes $\psi \in \Omega^2(X)$: $\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}'\psi = \mathrm{d}''\psi = 0$.

Weil die reellen partiellen Ableitungen miteinander vertauschen, gilt auch $\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}$, und deshalb für $f \in C^\infty(X)$:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \tfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right) = \left(\tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial f}{\partial\bar{z}} - \tfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\tfrac{\partial f}{\partial z}\right)(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}) = 0\,.$$

Wir merken uns also:

$$\boxed{\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0}\quad.$$

1.16 Aufgabe. Prove the following variant of the product rule: Let X be a Riemann surface, $f \in C^\infty(X)$ and $\omega \in \Omega^1(X)$. Then $\mathrm{d}(f\cdot\omega) = \mathrm{d}f\wedge\omega + f\cdot\mathrm{d}\omega$ holds.

Als vorerst letzte Operation für Differentialformen betrachten wir den sogenannten *Pullback*. Es sei Y eine weitere Riemannsche Fläche, und $\eta : Y \to X$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung. Wir wollen mittels η Differentialformen auf X zu Differentialformen auf Y *zurückziehen* [pull back]. Für 0-Formen, also globale Funktionen $f \in C^\infty(X) = \Omega^0(X)$ geht das einfach durch Komposition: $\eta^*f := f\circ\eta \in \Omega^0(Y)$. Für 1-Formen $\omega \in \Omega^1(X)$, etwa lokal dargestellt als $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z + g(z)\,\mathrm{d}\bar{z}$ bezüglich einer Karte (U,z) von X, definieren wir $\eta^*\omega \in \Omega^1(Y)$ durch

$$\eta^*\big(f(z)\,\mathrm{d}z + g(z)\,\mathrm{d}\bar{z}\big) = (f\circ\eta)\cdot\mathrm{d}(z\circ\eta) + (g\circ\eta)\cdot\mathrm{d}(\bar{z}\circ\eta)\,.$$

Für je zwei Karten (U,z) und $(\tilde{U},\tilde{z})$ von X gilt

$$\frac{\mathrm{d}(z\circ\eta)}{\mathrm{d}(\tilde{z}\circ\eta)} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tilde{z}}\circ\eta\,, \tag{$\diamond$}$$

und deshalb wird durch diese Definition tatsächlich eine globale Differentialform $\eta^*\omega \in \Omega^1(Y)$ definiert. Für 2-Formen gehen wir ganz genauso vor: Für $\psi \in \Omega^2(X)$ definieren wir $\eta^*\psi \in \Omega^2(Y)$ durch die lokale Festlegung

$$\eta^*\big(f(z)\,(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z})\big) = (f\circ\eta)\cdot\big(\mathrm{d}(z\circ\eta)\wedge\mathrm{d}(\bar{z}\circ\eta)\big)\,,$$

die ebenfalls wegen $(\diamond)$ eine globale 2-Form beschreibt.

1.17 Aussage. Es seien X, Y Riemannsche Flächen und $\eta : Y \to X$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung.

(a) Für $f \in C^\infty(X)$ gilt $\mathrm{d}(\eta^*f) = \eta^*\mathrm{d}f$.

(b) Für $\omega \in \Omega^1(X)$ gilt $\mathrm{d}(\eta^*\omega) = \eta^*\mathrm{d}\omega$.

Beweis. Für (a): Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, das η lokal biholomorph ist. Ist (U,z) eine Karte von X, so existiert eine offene Teilmenge $V \subset Y$ mit $\eta[Y] \subset X$, so dass $(V, z\circ\eta|_V)$ eine Karte von Y ist. Dann gilt:

$$\mathrm{d}(\eta^*f) = \mathrm{d}(f\circ\eta) = \tfrac{\partial(f\circ\eta)}{\partial(z\circ\eta)}\,\mathrm{d}(z\circ\eta) + \tfrac{\partial(f\circ\eta)}{\partial(\bar{z}\circ\eta)}\,\mathrm{d}(\bar{z}\circ\eta) \overset{(\diamond)}{=} \left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\circ\eta\right)\mathrm{d}(z\circ\eta) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\circ\eta\right)\mathrm{d}(\bar{z}\circ\eta) = \eta^*\mathrm{d}f\,.$$

Der Beweis von (b) läuft entsprechend. □

1.3 Integration und Residuum

Bei der Definition von Differentialformen sind wir von dem Bestreben geleitet worden, die Ableitung einer glatten Funktion auf einer Riemannschen Fläche durch ein globales Objekt zu beschreiben. Auch für die entgegengesetzte Operation, die Integration, sind Differentialformen die geeigneten Objekte, und zwar werden 1-Formen längs Kurven, und 2-Formen auf Flächen (offene oder kompakte Teilmengen einer Riemannschen Fläche) integriert.

Wir definieren derartige Integrale zunächst für Differentialformen, deren Träger in einer Kartenumgebung U der Riemannschen Fläche X enthalten sind. In diesem Fall genügt es, den Fall zu betrachten, dass der Integrationsweg bzw. das Integrationsgebiet ebenfalls in U enthalten ist. Sei also (U, z) eine Karte von X, $\omega \in \Omega^1(X)$ mit $\mathrm{Tr}(\omega) \subset U$ und $\gamma : [a, b] \to U$ eine glatte Kurve in U. In diesem Fall ist $\omega|_U = f(z)\,\mathrm{d}z + g(z)\,\mathrm{d}\bar{z}$ und wir definieren, fast wie in Funktionentheorie I,

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \big(f(\gamma(t)) \cdot (z \circ \gamma)'(t) + g(\gamma(t)) \cdot \overline{(z \circ \gamma)'(t)}\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Das schöne an dieser Festlegung ist, dass sie unabhängig von der Wahl der Karte ist. Ist nämlich $(\tilde{U}, \tilde{z})$ eine weitere Karte mit $\mathrm{Tr}(\omega) \subset \tilde{U}$ und $\gamma[[a, b]] \subset \tilde{U}$, etwa $\omega|_{\tilde{U}} = \tilde{f}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z} + \tilde{g}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\bar{\tilde{z}}$, so gilt wegen der Transformationsregel für 1-Formen für alle $t \in [a, b]$

$$\tilde{f}(\gamma(t)) = f(\gamma(t))\,\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tilde{z}}(\gamma(t)) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(\gamma(t)) = g(\gamma(t))\,\overline{\left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tilde{z}}(\gamma(t))\right)}$$

und wegen der Kettenregel

$$(\tilde{z} \circ \gamma)'(t) = \big((\tilde{z} \circ z^{-1}) \circ (z \circ \gamma)\big)'(t) = (\tilde{z} \circ z^{-1})'(z(\gamma(t))) \cdot (z \circ \gamma)'(t) = \tfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}z}(\gamma(t)) \cdot (z \circ \gamma)'(t)\,,$$

und somit

$$\int_a^b \big(\tilde{f}(\gamma(t))\,(\tilde{z} \circ \gamma)'(t) + \tilde{g}(\gamma(t))\,\overline{(\tilde{z} \circ \gamma)'(t)}\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(f(\gamma(t))\,(z \circ \gamma)'(t) + g(\gamma(t))\,\overline{(z \circ \gamma)'(t)}\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Das ist der Grund, warum 1-Formen die passenden Integranden für die Integration längs Kurven sind.

Entsprechendes gilt für die Integration von 2-Formen auf Flächen: Ist $\psi \in \Omega^2(X)$ mit $\mathrm{Tr}(\psi) \subset U$, etwa $\psi|_U = f(z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$, so definieren wir

$$\int_U \psi = \int_{z[U]} (f \circ z^{-1})(w)\,\mathrm{d}^2(w)\,,$$

wobei auf der rechten Seite ein 2-dimensionales (Lebesgue-)Integral über ein Gebiet in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ steht. Ist $h : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist $|h'|^2$ gleich der Determinante der Jacobi-Matrix von h als reell differenzierbare Funktion; hieraus und aus dem Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale ergibt sich, dass auch dieses Integral koordinatenunabhängig ist.

Um auf diese Weise auch global definierte Differentialformen integrieren können, verwenden wir sogenannte glatte Zerlegungen der Eins.

1.18 Satz. (Existenz einer glatten Zerlegung der Eins.) Sei X eine Riemannsche Fläche, und $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert für $\mathfrak{U}$ eine *Zerlegung der Eins* [partition of unity] von X, das ist eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ von glatten Funktionen $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $0 \le f_\alpha \le 1$

(b) $\mathrm{Tr}(f_\alpha) \subset U_\alpha$

(c) *Lokale Endlichkeit:* Für jedes $x \in X$ existiert eine Umgebung $U(x)$ von x in X, so dass alle bis auf endlich viele der f_α auf $U(x)$ verschwinden.

(d) $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1$.

Die Bezeichnung „Zerlegung der Eins" kommt natürlich von Eigenschaft (d). Wegen der lokalen Endlichkeit ist die Summe in Eigenschaft (d), wenn man sie an einem Punkt auswertet, jeweils nur eine Summe von endlich vielen positiven Zahlen. **Frage:** Gibt es auch holomorphe Zerlegungen der Eins?

Um nun Integrale global auf Riemannschen Flächen X zu definieren, betrachten wir einen holomorphen Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ von X und wählen nach obigem Satz zur offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X eine passende, glatte Zerlegung der Eins $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ist nun $\omega \in \Omega^1(X)$ und $\gamma : [a,b] \to X$ eine glatte Kurve, so definieren wir

$$\int_\gamma \omega := \sum_\alpha \int_\gamma f_\alpha \cdot \omega \, .$$

Dabei ist jeweils $\mathrm{Tr}(f_\alpha \cdot \omega)$ in der Kartenumgebung U_α enthalten, so dass die rechtsstehenden Integrale am Anfang dieses Abschnitts definiert wurden. Die Summe läuft über alle $\alpha \in A$ für die U_α mit $\gamma[[a,b]]$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat; weil $\gamma[[a,b]]$ kompakt ist, sind dies nur endlich viele, so dass die Summe eine komplexe Zahl ergibt. Schließlich ist die Definition nach der Koordinaten-Invarianz-Rechnung am Anfang dieses Abschnitts unabhängig von der Wahl des Atlas und der Zerlegung der Eins. Entsprechend definieren wir für $\psi \in \Omega^2(X)$ und eine (relativ) kompakte Teilmenge K von X

$$\int_K \psi = \sum_\alpha \int_K f_\alpha \cdot \psi \, .$$

Dabei sind die rechtsstehenden Integrale wieder von der zuvor definierten Art, und weil K kompakt ist, kann die Summe wieder als endlich angenommen werden. Auch diese Definition ist unabhängig von Atlas und Zerlegung der Eins.

Beweisskizze für Satz 1.18. Weil X abzählbare Topologie hat, dürfen wir ohne Beschränkung annehmen, dass $A = \mathbb{N}$ abzählbar ist, also $\mathfrak{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man kann zeigen, dass möglicherweise nach einer Verfeinerung der offenen Überdeckung (U_n) die U_n Kartenumgebungen zu Karten ϕ_n von X sind, so dass die Bilder $\phi_n[U_n] = B(0, r_n)$ Bälle von gewissen Radien $r_n > 0$ sind, dass aber umgekehrt schon $(\phi_n^{-1}[B(0, r_n/2)])_{n \in \mathbb{N}}$ ganz X überdeckt. Die Verfeinerung kann darüber hinaus so gewählt werden, dass jedes U_n nur mit endlich vielen anderen U_m einen nicht-leeren Durchschnitt hat.

Um in dieser Situation eine Zerlegung der Eins zu konstruieren, betrachten wir für reelle Zahlen $a < b$ die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \le a \\ \exp\left(\frac{1}{x-b} \exp(\frac{1}{a-x})\right) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{für } b \le x \end{cases} \, .$$

Man kann zeigen, dass $f_{a,b}$ glatt ist. Für $r > 0$ ist dann die Funktion $g_r(z) = f_{r/2,2r/3}(|z|)$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{C}$, die außerhalb von $B(0, 2r/3)$ verschwindet und auf $B(0, r/2)$ identisch gleich 1 ist. Wir setzen die glatte Funktion $h_n = g_{r_n} \circ \phi_n$ auf U_n zu einer glatten Funktion auf X fort, indem wir sie außerhalb von U_n auf Null setzen. Damit sind die beiden Funktionen h_n, $1 - h_n$ eine Zerlegung der Eins zu der zwei-elementigen offenen Überdeckung $\{U_n, \bigcup_{m\neq n} U_m\}$ von X.

Mithilfe der h_n können wir die gewünschte Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren: Wir setzen

$$f_n = h_n \prod_{l=1}^{n-1}(1 - h_l) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Dann gilt offenbar $0 \leq f_n \leq 1$ und $\mathrm{Tr}(f_n) \subset \mathrm{Tr}(h_n) \subset U_n$. Weil U_n nur mit endlich vielen anderen U_m einen nicht-leeren Durchschnitt hat, gilt die Bedingung der lokalen Endlichkeit. Schließlich zeigt man durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_1 + \ldots + f_n + \prod_{l=1}^{n}(1 - h_l) = 1 .$$

Ist $x \in X$ gegeben, so gibt es ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $\phi_{n(x)}(x) \in B(0, r_n/2)$ und damit $h_{n(x)}(x) = 1$. Für jedes $n \geq n(x)$ gilt dann $f_1(x) + \ldots + f_n(x) = 1$ und somit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 1$. □

1.19 Aussage. Rechenregeln für das Kurvenintegral. Sei X eine Riemannsche Fläche und $\gamma : [a, b] \to X$ eine glatte Kurve.

(a) Für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\int_\gamma(\lambda_1\,\omega_1 + \lambda_2\,\omega_2) = \lambda_1 \int_\gamma \omega_1 + \lambda_2 \int_\gamma \omega_2$.

(b) Für $f \in C^\infty(X)$ gilt $\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. Insbesondere ist $\int_\gamma \mathrm{d}f = 0$, falls die Kurve γ geschlossen ist.

(c) Ist $\omega \in \Omega(X)$, Y eine weitere Riemannsche Fläche, $\eta : Y \to X$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung, und $\alpha : [a, b] \to Y$ eine glatte Kurve, so gilt $\int_\alpha \eta^*\omega = \int_{\eta\circ\alpha} \omega$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass sowohl γ als auch $\mathrm{Tr}(\omega), \mathrm{Tr}(\omega_k)$ in einer Kartenumgebung U zu einer Karte (U, z) von X enthalten sind. Für diesen Fall ist (a) offensichtlich. Für (b) gilt (wobei wir wieder $z = x + iy$ mit den reell differenzierbaren Funktionen $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z) : U \to \mathbb{R}$ schreiben):

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{d}f &= \int_\gamma \left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \tfrac{\partial f}{\partial \bar z}\mathrm{d}\bar z\right) \\
&= \int_a^b \left(\tfrac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot (z\circ\gamma)'(t) + \tfrac{\partial f}{\partial \bar z}(\gamma(t)) \cdot \overline{(z\circ\gamma)'(t)}\right) \\
&= \int_a^b \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot (x\circ\gamma)'(t) + i \cdot \tfrac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot (y\circ\gamma)'(t)\right) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) .
\end{aligned}$$

Für (c) können wir wieder annehmen, dass $z \circ \eta$ eine Karte von Y ist. Wir schreiben lokal $\omega = \omega_1(z)\,\mathrm{d}z + \omega_2(z)\,\mathrm{d}\bar z$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \eta^*\omega &= \int_\alpha \big((\omega_1\circ\eta)\,\mathrm{d}(z\circ\eta) + (\omega_2\circ\eta)\,\mathrm{d}(\bar z\circ\eta)\big) \\
&= \int_a^b \big(\omega_1(\eta(\alpha(t)))\,(z\circ\eta\circ\alpha)'(t) + \omega_2(\eta(\alpha(t)))\,\overline{(z\circ\eta\circ\alpha)'(t)}\big)\mathrm{d}t = \int_{\eta\circ\alpha} \omega .
\end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall ergeben sich die Aussagen hieraus durch Anwendung einer Zerlegung der Eins. □

Für Flächenintegrale gilt auch in dieser Situation der Satz von Stokes, den wir hier ohne Beweis zitieren:

1.20 Satz. Satz von Stokes. Es sei X eine Riemannsche Fläche, $\omega \in \Omega^1(X)$, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand durch die geschlossene Kurve ∂K glatt und in mathematisch positiver Richtung berandet sei. Dann gilt

$$\int_K \mathrm{d}\omega = \int_{\partial K} \omega \; .$$

Unter den Differentialformen vom Grad 1 spielen zwei Klassen eine besondere Rolle, nämlich die geschlossenen und die exakten 1-Formen:

1.21 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $\omega \in \Omega^1(X)$.

(a) ω heißt *geschlossen* [closed], wenn $\mathrm{d}\omega = 0$ ist.

(b) ω heißt *exakt* [exact], wenn es ein $f \in C^\infty(X)$ mit $\mathrm{d}f = \omega$ gibt. Ein solches f heißt *Stammfunktion* [primitive] zu ω.

Die Regel $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ zeigt, dass jede exakte 1-Form auch geschlossen ist. Die folgende Aufgabe zeigt, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen falsch ist. Wir werden jedoch bald sehen, dass auf *einfach zusammenhängenden* Riemannschen Flächen die Umkehrung richtig ist, d.h. jede geschlossene 1-Form auch exakt ist.

1.22 Aufgabe. Consider $X = \mathbb{C}^*$,the smooth 1-form $\omega \in \Omega^1(X)$ that is given with respect to the global chart $z = x + iy = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ of $\mathbb{C}^*$ by

$$\omega = -\frac{y}{|z|^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{|z|^2}\,\mathrm{d}y \; ,$$

and the closed smooth curve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$ that parameterises S^1.

Show that ω is closed, compute $\int_\gamma \omega$ and conclude that ω is not exact.

1.23 Aufgabe. Let X be a Riemann surface and $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$. Show that ω is holomorphic if and only if it is closed.

1.24 Aussage und Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$ auf X, und $x \in X$. Für jede Karte (U, z) von X mit $x \in U$ und $z(x) = 0$ gibt es genau ein $c \in \mathbb{C}$, so dass die 1-Form $\omega - \frac{c}{z} \cdot \mathrm{d}z$ auf einer Umgebung von x exakt ist. Der Wert von c hängt nicht von der Wahl der Karte z ab. Dieser Wert wird das *Residuum* [residue] von ω in x genannt, und mit $\mathrm{Res}_x(\omega)$ bezeichnet.

Beweis. Bezüglich einer Karte (U, z) wie in der Aussage können wir $\omega = \omega_1(z)\,\mathrm{d}z$ mit einer meromorphen Funktion $\omega_1 : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ schreiben. $\omega_1 \circ z^{-1}$ ist dann auf $z[U] \subset \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion im Sinne der Funktionentheorie I. Ist $c \in \mathbb{C}$ der Koeffizient zu z^{-1} der Laurentreihe dieser Funktion in $z = 0$, so besitzt $\omega_1 \circ z^{-1} - \frac{c}{z}$ auf $B(0,\varepsilon)$ eine Stammfunktion g, und dies ist für keine andere Wahl von c der Fall. Hier ist $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass $B(0,\varepsilon) \subset z[U]$ ist. Dann besitzt $(\omega - \frac{c}{z}\mathrm{d}z)|_{z^{-1}[B(0,\varepsilon)]}$ die Stammfunktion $(g \circ z)|_{z^{-1}[B(0,\varepsilon)]}$.

Ist nun $(\tilde{U}, \tilde{z})$ eine weitere Karte von X mit $x \in \tilde{U}$ und $\tilde{z}(x) = 0$, so gibt es nach dem Vorangegangenen genau ein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$, so dass $\omega - \frac{\tilde{c}}{\tilde{z}}\mathrm{d}\tilde{z}$ auf einer Umgebung von x eine Stammfunktion besitzt. Dann gibt es eine Umgebung in $U \cap \tilde{U}$, auf der $\frac{c}{z}\mathrm{d}z - \frac{\tilde{c}}{\tilde{z}}\mathrm{d}\tilde{z} = \frac{c-\tilde{c}}{z}\,\mathrm{d}z + \tilde{c}\cdot\big(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{\tilde{z}}\,\mathrm{d}\tilde{z}\big)$ eine Stammfunktion besitzt. Die 1-Form $\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{\tilde{z}}\,\mathrm{d}\tilde{z}$ ist in x holomorph, und besitzt daher in der Nähe von x eine Stammfunktion. Also besitzt auch $\frac{c-\tilde{c}}{z}\,\mathrm{d}z$ lokal in der Nähe von x eine Stammfunktion, und das ist nur für $c - \tilde{c} = 0$ möglich. □

1.25 Aussage. Seien X, Y Riemannsche Flächen, $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ (1,0), $y \in Y$ und $f : Y \to X$ eine holomorphe Abbildung, die bei y lokal injektiv ist. Dann gilt die *Transformationsformel* $\mathrm{Res}_y(f^*\omega) = \mathrm{Res}_{f(y)}(\omega)$.

Beweis. Ist z eine Kartenfunktion von X bei $f(y)$, so ist $z \circ f$ (falls erforderlich, eine Einschränkung davon) eine Kartenfunktion von Y bei y. $\omega - \mathrm{Res}_{f(y)}(\omega) \cdot \frac{\mathrm{d}z}{z}$ besitzt in der Nähe von $f(y)$ eine holomorphe Stammfunktion g. Dann gilt

$$\mathrm{d}(g \circ f) = f^*\mathrm{d}g = f^*\omega - \mathrm{Res}_{f(y)}(\omega) \cdot \frac{\mathrm{d}(z \circ f)}{z \circ f} ,$$

anders gesagt: $f^*\omega - \mathrm{Res}_{f(y)}(\omega) \cdot \frac{\mathrm{d}(z\circ f)}{z\circ f}$ besitzt bei y lokal eine holomorphe Stammfunktion. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Definition 1.24 folgt daraus die Behauptung. □

1.26 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ (1,0), $x \in X$, und (U, z) eine Karte von X mit $x \in U$ und $z(x) = 0$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset z[U]$:

$$\mathrm{Res}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z^{-1}\circ\partial B(0,\varepsilon)} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (z^{-1})^*\omega .$$

Beweis. Dies ergibt sich, indem man die entsprechende klassische Aussage der Funktionentheorie I mit der Transformationsformel der Aussage 1.25 für $f = z^{-1}$ kombiniert. □

Meromorphe Differentiale vom Typ $(1,0)$ heißen auch *abelsche Differentiale* [abelian differentials]. Nach einem alten Sprachgebrauch unterteilt man sie in drei Arten: Abelsche Differentiale *der ersten Art* [of the first kind] sind holomorph. Bei Abelschen Differentialen *der zweiten Art* [of the second kind] verschwindet ihr Residuum an jedem Pol. Und Abelsche Differentiale *der dritten Art* [of the third kind] sind alle anderen.

1.4 Überlagerungen

Bisher haben wir noch nicht sehr viele Beispiele für Riemannsche Flächen: abgesehen von den Gebieten in $\mathbb{C}$ im Wesentlichen nur die Riemannsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$. Eine Möglichkeit, weitere Riemannsche Flächen zu konstruieren, wird durch sogenannte Überlagerungen geliefert. Die Überlagerungen, die wir in diesem Abschnitt kennenlernen, sind *unverzweigt*.

1.27 Definition. Seien X, Y topologische Räume. Eine surjektive, stetige Abbildung $\pi : X \to Y$ heißt *(unverzweigte) Überlagerung* [(unbranched) covering map], wenn es zu jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung $V(y) \subset Y$ und für jedes $x \in \pi^{-1}[\{y\}]$ eine offene Umgebung $U(x) \subset X$ gibt, so dass gilt:

(i) $\pi^{-1}[V(y)] = \dot{\bigcup}_{x \in \pi^{-1}[\{y\}]} U(x)$ (disjunkte Vereinigung!)

(ii) $\pi|_{U(x)} : U(x) \to V(y)$ ist jeweils ein Homöomorphismus *auf* $V(y)$.

In dieser Situation sagt man, dass die Überlagerung π über $V(y)$ *trivial* [trivial] ist.

Sind in der Situation der Definition X, Y Riemannsche Flächen und ist die Überlagerung $\pi : X \to Y$ holomorph, so sind wegen dem Satz von Osgood die Homöomorphismen $\pi|_{U(x)}$ aus (ii) schon biholomorph. Insbeondere ist π dann automatisch lokal biholomorph.

1.28 Beispiele. (a) Sei Z ein diskreter topologischer Raum (z.B. eine endliche Menge) und Y ein weiterer topologischer Raum. Dann ist $\pi : Z \times Y \to Y,\ (z, y) \mapsto y$ eine Überlagerung. In dieser Situation kann $V(y) = Y$ für jedes $y \in Y$ gewählt werden, deshalb heißen derartige Überlagerungen *trivial*.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\pi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto z^n$ eine n-blättrige, holomorphe Überlagerung. Die entsprechende Abbildung auf $\mathbb{C}$ hat bei $z = 0$ einen *Verzweigungspunkt*.

(c) Sei Γ ein *maximales Gitter* in $\mathbb{C}$, d.h. es existieren zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$. Dann sei $\mathbb{C}/\Gamma$ die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $z \sim \tilde{z} :\Leftrightarrow z - \tilde{z} \in \Gamma$. Es gibt genau eine Struktur einer Riemannschen Fläche auf $\mathbb{C}/\Gamma$, so dass die natürliche Abbildung $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ eine holomorphe Überlagerung wird. Als topologischer Raum ist $\mathbb{C}/\Gamma$ homöomorph zum Torus $S^1 \times S^1$. Man nennt jede derartige Riemannsche Fläche $\mathbb{C}/\Gamma$ deshalb einen *(komplexen) Torus* [complex torus] oder eine *elliptische Kurve*† [elliptic curve]. In Abschnitt 1.5 werden wir uns eingehender mit komplexen Tori befassen.

1.29 Aufgabe. Let X, Y be topological spaces, Y be connected, and $\pi : X \to Y$ a covering map so that $\pi^{-1}[\{y\}]$ is finite for every $y \in Y$. Then there exists $n \in \mathbb{N}$ so that $\#\pi^{-1}[\{y\}] = n$ for all $y \in Y$. In this situation one says that π is an *n-fold covering map* [n-fache Überlagerung oder n-blättrige Überlagerung].

Die nächste Aussage befasst sich mit dem Liften („Hochheben") von Kurven oder Abbildungen auf Rechtecken:

1.30 Lemma. Es seien X, Y topologische Räume, und $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung.

(a) Sei $\alpha : [a, b] \to Y$ ein stetiger Weg, $t_0 \in [a, b]$ und $x_0 \in \pi^{-1}[\{\alpha(t_0)\}]$. Dann existiert genau ein stetiger Weg $\tilde{\alpha} : [a, b] \to X$ mit $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0$. Die Kurve $\tilde{\alpha}$ heißt der *Lift* [lift] von α.

---

†Die Erklärung für diesen zweiten Namen müssen wir auf später verschieben.

(b) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ (nicht unbedingt endliche) Intervalle, $Q = I \times J$, $h : Q \to Y$ eine stetige Abbildung, $q_0 \in Q$ und $x_0 \in \pi^{-1}[\{h(q_0)\}]$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{h} : Q \to X$ mit $\pi \circ \tilde{h} = h$ und $\tilde{h}(q_0) = x_0$. Die Abbildung $\tilde{h}$ heißt der *Lift* [lift] von h.

Beweis. Für (a). Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: Sind $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ zwei Lifts von α mit $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0 = \hat{\alpha}(t_0)$, so ist die Menge $A = \{t \in I \mid \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)\}$ wegen der Stetigkeit von $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ abgeschlossen und wegen $x_0 \in A$ nicht leer. Sie ist auch offen, denn für $t \in A$ gibt es eine Umgebung $V(\alpha(t))$, über der π trivial ist, und dann stimmen $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ auf der t enthaltenden Zusammenhangskomponente der offenen Menge $\alpha^{-1}[V(\alpha(t))] \ni t$ überein. Da I zusammenhängend ist, folgt $A = I$ und somit $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Zur Existenz: Wir dürfen $t_0 = a$ annehmen. Für jedes $t \in [a, b]$ sei $V(t)$ eine Umgebung von $\alpha(t)$ in Y, über der π trivial ist, und die Zusammenhangskomponente von $\alpha^{-1}[V(t)]$ durch t ist eine offene Umgebung $I(t)$ von t in I. Die $(I(t))_{t\in[a,b]}$ bilden eine offene Überdeckung des kompakten Intervals $[a, b]$. Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung $I(t_0), \ldots, I(t_n)$ von I, und wir können $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ annehmen. Auf jedem der $I(t_k)$ besitzt α offenbar einen Lift $\tilde{\alpha}_k$, und zwar können wir $\tilde{\alpha}_0$ mit $\tilde{\alpha}_0(t_0) = x_0$ und induktiv, nachdem wir die Lifts $\tilde{\alpha}_0, \ldots, \tilde{\alpha}_k$ schon konstruiert haben, den Lift $\tilde{\alpha}_{k+1}$ mit $\tilde{\alpha}_{k+1}(t_{k+1}) = \tilde{\alpha}_k(t'_{k+1})$ für ein beliebig gewähltes $t'_{k+1} \in I(t_k) \cap I(t_{k+1})$ wählen. Weil $I(t_k) \cap I(t_{k+1})$ ein Intervall ist, folgt aus dieser Wahl $\tilde{\alpha}_{k+1}|_{I(t_k)\cap I(t_{k+1})} = \tilde{\alpha}_k|_{I(t_k)\cap I(t_{k+1})}$, und deshalb setzen sich alle $\tilde{\alpha}_k$ zu einem stetigen Lift $\tilde{\alpha} : [a, b] \to X$ mit $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0$ zusammen.

Für (b). Zum Beweis kann man annehmen, dass Q kompakt ist, weil man jedes Rechteck als aufsteigende Vereinigungen von kompakten Rechtecken ausschöpfen kann. Man kann ebenfalls annehmen, dass q_0 ein Eckpunkt von Q ist, indem man Q eventuell zerlegt. Dann folgt der Beweis wie bei der Kurvenliftung. □

1.31 Definition. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend* [locally arc connected], wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x in X eine wegzusammenhängende Umgebung V mit $x \in V \subset U$ gibt.

Riemannsche Flächen sind offensichtlich lokal wegzusammenhängend.

Der folgende Satz verallgemeinert das Lemma 1.30 für beliebige, einfach zusammenhängende Definitionsgebiete:

1.32 Satz. Es seien X, Y, Z lokal wegzusammenhängende topologische Räume, $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung, $g : Z \to Y$ eine stetige Abbildung, $z_0 \in Z$ und $x_0 \in \pi^{-1}[\{z_0\}]$. Sofern Z einfach zusammenhängend ist, existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{g} : Z \to X$ mit $\pi \circ \tilde{g} = g$ und $\tilde{g}(z_0) = x_0$. Die Abbildung $\tilde{g}$ heißt der *Lift* [lift] von g.

Zusatz. Sind X, Y, Z Riemannsche Flächen, ist π holomorph, und ist g holomorph (glatt), so ist auch $\tilde{g}$ holomorph (glatt).

Beweis. Sei $z \in Z$ und $\alpha : [0, 1] \to Z$ ein stetiger Weg mit $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha(1) = z$. Nach Lemma 1.30(a) gibt es genau einen Lift $\beta : [0, 1] \to X$ der Kurve $g \circ \alpha : [0, 1] \to Y$ mit $\beta(0) = x_0$. Sind α_0, α_1 zwei derartige Wege zum selben $z \in Z$, so existiert, weil Z einfach zusammenhängend ist, eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \to Z$, so dass für alle $t, s \in [0, 1]$

gilt:

$$h(t,0) = \alpha_0(t), \quad h(t,1) = \alpha_1(t), \quad h(0,s) = z_0 \quad \text{und} \quad h(1,s) = z \; .$$

(Ein solches h heißt eine *Homotopie mit festgehaltenen Randpunkten* von α_0 und α_1.) Nach Lemma 1.30(b) gibt es genau einen stetigen Lift $k : [0,1] \times [0,1] \to X$ der Abbildung $g \circ h : [0,1] \times [0,1] \to Y$ mit $k(0,0) = x_0$. Für alle $s \in [0,1]$ liegt $k(0,s)$ bzw. $k(1,s)$ in der diskreten Menge $\pi^{-1}[\{z_0\}]$ bzw. $\pi^{-1}[\{z\}]$. Wegen der Stetigkeit von k folgt, dass für alle $s \in [0,1]$ gilt:

$$k(0,s) = k(0,0) = x_0 \quad \text{und} \quad k(1,s) = k(1,0) \; .$$

Deshalb ist $k(\,\cdot\,,0)$ bzw. $k(\,\cdot\,,1)$ der stetige Lift von $g \circ \alpha_0$ bzw. $g \circ \alpha_1$ mit Wert x_0 an der Stelle $t = 0$, und deshalb haben diese beiden Lifte an der Stelle $t = 1$ denselben Wert. Das bedeutet, dass durch die Definition

$$\tilde{g} : Z \to X, \; z \mapsto \beta(1)$$

eine von der jeweiligen Wahl von α unabhängige Abbildung $\tilde{g}$ definiert wird. Es gilt $\tilde{g}(z_0) = x_0$ und $\pi \circ \tilde{g} = g$. Es verbleibt zu zeigen, dass $\tilde{g}$ stetig ist. Dazu sei $z \in Z$ gegeben, $x = \tilde{g}(z) \in X$ und $y = g(z) = \pi(x) \in Y$. Weiter sei $V(y) \subset Y$ eine Umgebung von y, über der π trivial ist, und $U(x) \subset X$ die entsprechende Umgebung von x, so dass $\pi|_{U(x)} : U(x) \to V(y)$ ein Homöomorphismus ist. Weil X und Y lokal wegzusammenhängend sind, können wir $U(x)$ und $V(y)$ als wegzusammenhängend annehmen. Sei weiter $W(z)$ die Zusammenhangskomponente der offenen Menge $g^{-1}[V(y)] \subset Z$, die z enthält. Dann ist $\tilde{g}|_{W(z)} = (\pi|_{U(x)})^{-1} \circ g|_{W(z)}$, und damit ist $\tilde{g}$ in z stetig.

Der Beweis des Zusatzes über Riemannsche Flächen läuft analog wie der Beweis der Stetigkeit von $\tilde{g}$. □

1.33 Definition. Seien X, Y topologische Räume und $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung.

(a) Eine *Decktransformation* oder *Deckbewegung* [covering transformation, deck transformation] ist ein Homöomorphismus $\gamma : X \to X$ mit $\pi \circ \gamma = \pi$; die letztere Bedingung bedeutet gerade, dass γ auf jeder Faser $\pi^{-1}[\{y\}]$ als Permutation operiert.

Die Gesamtheit aller Decktransformationen von π bildet eine Gruppe, die die *Decktransformationsgruppe* [covering transformation group, deck transformation group] von π genannt wird, und die wir mit $\mathrm{Deck}(\pi)$ bezeichnen.

(b) Die Überlagerung π heißt *regulär* [regular], wenn $\mathrm{Deck}(\pi)$ auf den Fasern $\pi^{-1}[\{y\}]$ mit $y \in Y$ jeweils transitiv operiert.

Sind X, Y Riemannsche Flächen und ist $\pi : X \to Y$ eine holomorphe Überlagerung, so sind alle Decktransformationen von π automatisch biholomorph.

1.34 Beispiel. Ist $\mathbb{C}/\Gamma$ ein komplexer Torus wie in Beispiel 1.28(c), so bilden die Translationen

$$z \mapsto z + \omega \quad \text{mit} \quad \omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \in \Gamma \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

die Decktransformationsgruppe der Überlagerung $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$.

1.35 Aufgabe. Let X and Y be topological spaces and $\pi : X \to Y$ be a covering map. Prove the following:

(a) If π is a 2-fold covering, then π is regular.

(b) If X is simply connected, then π is regular.

[*Hint.* Deck transformations of π are lifts of π with respect to π. You might need to read this sentence twice.]

Die Decktransformationsgruppe einer Überlagerung operiert stets frei im Sinne der folgenden Definition. Umgekehrt werden wir sehen, dass jede frei operierende Untergruppe der Homöomorphismengruppe eines topologischen Raums X als Decktransformationsgruppe einer geeigneten „Unterlagerung" von X realisiert werden kann. Die letztere Aussage ist ein wichtiges Prinzip zur Konstruktion von Überlagerungen; dies werden wir zur Konstruktion „neuer" Riemannscher Flächen verwenden.

1.36 Definition. Sei X ein topologischer Raum, und Γ eine Untergruppe der Homöomorphismengruppe von X. Man sagt, dass Γ *frei operiert* [acts freely], wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(F) Ist $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}_X\}$, so besitzt γ keine Fixpunkte.

(H) Zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ existieren Umgebungen $U(x_1), U(x_2)$ von x_1 bzw. x_2 in X mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\gamma[U(x_1)] \cap U(x_2) \neq \varnothing \implies \gamma(x_1) = x_2 \,.$$

1.37 Satz. Seien X, Y lokal wegzusammenhängende topologische Hausdorffräume und $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung.

(a) Die Decktransformationsgruppe von π operiert frei auf X.

(b) Sei Γ eine frei operierende Untergruppe der Homöomorphismengruppe von X. Durch

$$x_1 \sim x_2 \quad \iff \quad \text{es gibt ein } \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(x_1) = x_2$$

wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit X/Γ und die kanonische Projektion mit $p : X \to X/\Gamma,\ x \mapsto [x] = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$. Dann existiert auf X/Γ genau eine Struktur eines wegzusammenhängenden topologischen Hausdorffraums, so dass $p : X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung wird. Natürlich ist p regulär, und es gilt $\mathrm{Deck}(p) = \Gamma$.

Zusatz. Ist X eine Riemannsche Fläche, und ist Γ in der Gruppe der biholomorphen Abbildungen $X \to X$ enthalten, so existiert auf X/Γ genau eine Struktur einer Riemannschen Fläche, so dass p eine holomorphe Überlagerung wird.

(c) Ist die Überlagerung π regulär, so gilt für $\Gamma = \mathrm{Deck}(\pi)$:

Es existiert ein Homöomorphismus $F : Y \to X/\Gamma$, so dass $F \circ \pi = p$ gilt, d.h. dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "F"'] & X/\Gamma \,. \end{tikzcd}$$

Zusatz. Sind X, Y Riemannsche Flächen und ist π holomorph, so ist die Abbildung F biholomorph.

Beweis. Für (a). Aus der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 1.30(a) folgt allgemein die Eindeutigkeit des Lifts bezüglich π, und deshalb erfült $\mathrm{Deck}(\pi)$ Bedingung (F) aus Definition 1.36. Für Bedingung (H) seien $x_1, x_2 \in X$ gegeben. Wenn $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ ist, so existieren disjunkte Umgebungen $V_1, V_2 \subset Y$ mit $\pi(x_k) \in V_k$. Dann ist $U(x_k) = \pi^{-1}[V_k]$ eine Umgebung von x_k, und für jedes $\gamma \in \mathrm{Deck}(\pi)$ gilt $\gamma[U(x_1)] \cap U(x_2) = U(x_1) \cap U(x_2) = \varnothing$. Ist hingegen $\pi(x_1) = \pi(x_2) =: y$, so wählen wir eine Umgebung $V \subset Y$ von y, über der π trivial ist, und Umgebungen $U(x_k)$ von x_k, so dass $\pi|_{U(x_k)} : U(x_k) \to V$ ein Homöomorphismus auf V ist. Mit dieser Wahl ist Bedingung (H) erfüllt.

Für (b). Wir versehen X/Γ mit der Quotiententopologie bezüglich p, d.h. wir nennen eine Teilmenge $V \subset X/\Gamma$ offen, wenn $p^{-1}[V]$ offen in X ist. Dadurch wird p zu einer stetigen und offenen Abbildung. Wir zeigen, dass X/Γ ein Hausdorffraum ist: Seien $[x_1], [x_2] \in X/\Gamma$ gegeben mit $[x_1] \neq [x_2]$. Dann seien Umgebungen $U(x_1)$ und $U(x_2)$ in X gemäß der Eigenschaft (H) für Γ gewählt, und $V(x_k) = p[U(x_k)]$. Würde es ein $\tilde{y} \in V(x_1) \cap V(x_2)$ geben, so gäbe es $\tilde{x}_k \in U(x_k)$ mit $p(\tilde{x}_1) = \tilde{y} = p(\tilde{x}_2)$, also existiert $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ und somit $\gamma[U(x_1)] \cap U(x_2) \neq \varnothing$. Nach der Eigenschaft (H) folgt $\gamma(x_1) = x_2$ und somit $[x_1] = [x_2]$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist $V(x_1) \cap V(x_2) = \varnothing$.

Zum Beweis, dass p eine Überlagerung wird, sei $y \in X/\Gamma$ gegeben. Wir wählen ein $x_0 \in p^{-1}[\{y\}]$; dazu existiert wegen der Eigenschaften (H) und (F) eine Umgebung $U(x_0)$, so dass $\gamma[U(x_0)] \cap U(x_0) = \varnothing$ für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}_X\}$ gilt. Dann ist $V(y) = p[U(x_0)]$ eine offene Umgebung von y. Ihr Urbild unter p besteht aus den offenen Mengen $U(\gamma x_0) = \gamma[U(x_0)]$ für $\gamma \in \Gamma$. Diese sind paarweise disjunkt, denn für $\gamma, \tilde{\gamma} \in \Gamma$ mit $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ gilt

$$\gamma[U(x_0)] \cap \tilde{\gamma}[U(x_0)] = \tilde{\gamma}[(\tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma)[U(x_0)] \cap U(x_0)] = \tilde{\gamma}[\varnothing] = \varnothing\,.$$

Außerdem ist für jedes $x = \gamma(x_0)$ die Abbildung $p|_{U(x)} : U(x) \to V(y)$ bijektiv; da sie außerdem stetig und offen ist, ist sie ein Homöomorphismus. Damit ist p über $V(y)$ trivial.

Für den Beweis des Zusatzes genügt es, im vorigen Argument $U(x_0)$ als Kartenumgebung von X zu wählen. Ist z die zugehörige Kartenabbildung, so erhält man durch $z \circ (p|_{U(x_0)} : U(x_0) \to V(y))^{-1}$ eine Karte auf X/Γ. Zwei derartige Karten sind miteinander verträglich, also erhält man auf diese Weise einen komplexen Atlas für X/Γ, und bezüglich diesem ist p offenbar holomorph.

Für (c). Weil π regulär ist, ist zu jedem $y \in Y$ die Faser $\pi^{-1}[\{y\}]$ eine Äquivalenzklasse von $\sim$ und somit ein Element von X/Γ. Somit wird durch $F : Y \to X/\Gamma,\ y \mapsto \pi^{-1}[\{y\}]$ eine bijektive Abbildung definiert. Diese ist stetig und offen, und deshalb ein Homöomorphismus. □

1.5 Möbiustransformationen und Unterlagerungen unter $\mathbb{C}$ und $\widehat{\mathbb{C}}$

In diesem Abschnitt lernen wir die *Möbiustransformationen* kennen, das sind die biholomorphen Abbildungen der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$. Mit ihrer Hilfe werden wir feststellen, welche Unterlagerungen unter der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ möglich sind. Unter diesen sind die komplexen Tori, die wir schon in Beispiel 1.28(c) kennengelernt haben, die wichtigsten. Wir erfahren außerdem, dass es nicht möglich ist, eine nicht-triviale Unterlagerung unter $\widehat{\mathbb{C}}$ zu konstruieren.

1.38 Aussage. (a) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc \neq 0$. Dann wird durch

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

eine biholomorphe Abbildung definiert, und es gibt keine weiteren biholomorphen Abbildungen $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Diese Abbildungen heißen *Möbius-Transformationen* [Möbius transformations], ihre Gruppe wird mit $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ bezeichnet.

(b) Sei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Dann wird durch

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto az + b$$

eine biholomorphe Abbildung definiert, und es gibt keine weiteren biholomorphen Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Beweis. Offensichtlich ist $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine meromorphe Funktion, deren Umkehrung durch die ebenfalls meromorphe Funktion $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$ gegeben wird. Daher ist f als Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ biholomorph. Ebenso ist $g : z \mapsto az + b$ offenbar eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Sei nun $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ irgendeine biholomorphe Abbildung. Für $z_0 = f^{-1}(\infty)$ betrachten wir die Möbiustransformation $h(z) = \frac{z_0 \cdot z + 1}{z}$. Damit ist $g = f \circ h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine weitere biholomorphe Abbildung, und es gilt $g(\infty) = \infty$. Deshalb bildet g die Zahlenebene $\mathbb{C}$ auf sich ab, also ist g eine ganze Funktion, die in $z = \infty$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Nach Funktionentheorie I ist g ein Polynom 1. Grades, also von der Form $g(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Es ist $h^{-1}(z) = \frac{1}{z - z_0}$ und daher

$$f(z) = g(h^{-1}(z)) = a \cdot \frac{1}{z - z_0} + b = \frac{bz + (a - bz_0)}{z - z_0},$$

wobei $\det\left(\begin{smallmatrix} b & a - bz_0 \\ 1 & -z_0 \end{smallmatrix}\right) = -a \neq 0$ ist. Somit ist f eine Möbius-Transformation. □

Das Rechnen mit Möbius-Transformationen wird durch die folgende Beobachtung erleichtert: Die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit dem Kern $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right) \middle| \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$. Die Einschränkung $\Phi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$ ist immer noch surjektiv.

1.39 Aussage. Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus $\Phi : (\mathbb{C}, +) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\omega \mapsto (f_\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + \omega)$. Die auf $\mathbb{C}$ frei operierenden Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ sind genau die Folgenden:

(T) $\Gamma = \Phi[\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2]$ mit zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$.

(Z) $\Gamma = \Phi[\mathbb{Z}\omega]$ mit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(E) $\Gamma = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\}$.

Nach Satz 1.37(b) gehören zu den in Aussage 1.39 klassifizierten frei operierenden Untergruppen Γ von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ reguläre holomorphe Unterlagerungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ von $\mathbb{C}$. Andererseits ist $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, und deshalb ist jede Unterlagerung unter $\mathbb{C}$ regulär (vergleiche Aufgabe 1.35(b)). Wegen Satz 1.37(c) ist daher jede holomorphe Unterlagerung unter $\mathbb{C}$ von der Art $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$. Deshalb entspricht Aussage 1.39 einer vollständigen Klassifikation der holomorphen Unterlagerungen von $\mathbb{C}$. In diesem Sinne entsprechen den verschiedenen Γ aus Aussage 1.39 den folgenden holomorphen Unterlagerungen:

(T) $\mathbb{C}/\Gamma$ ist ein komplexer Torus und $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die zugehörige Überlagerung aus Beispiel 1.28(c). Die Riemannsche Fläche $\mathbb{C}/\Gamma$ ist kompakt, und deshalb zu keinem Gebiet in $\mathbb{C}$ biholomorph äquivalent.

(Z) In diesem Fall ist $\mathbb{C}/\Gamma$ offensichtlich eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche, die mittels der (wohldefinierten!) Abbildung

$$S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}/\Gamma,\ (e^{2\pi i t}, s) \mapsto (t + is)\omega$$

diffeomorph zum Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ ist. Der „komplexe Zylinder“ $\mathbb{C}/\Gamma$ ist biholomorph zu $\mathbb{C}^*$ mittels der Exponentialabbildung, genauer mittels der wohldefinierten, biholomorphen Abbildung

$$\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}^*,\ [z] = z + \Gamma \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i}{\omega}\, z\right) .$$

Insbesondere sind je zwei derartige Zylinder zueinander biholomorph äquivalent.

Endliche Abschnitte des Zylinders $\mathbb{C}/\Gamma$ entsprechen unter obiger Abbildung Kreisringen um Null. (Es schadet nicht, sich das zu merken.)

(E) Hier ist die Überlagerung $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ natürlich trivial (ein-blättrig unverzweigt), und $\mathbb{C}/\Gamma$ die komplexe Ebene selbst.

Beweis von Aussage 1.39. Es ist offensichtlich, dass die in der Aussage beschriebenen Γ auf $\mathbb{C}$ frei operierende Untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ sind. Sei umgekehrt eine auf $\mathbb{C}$ frei operierende Untergruppe Γ von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ gegeben. Jedes $f \in \Gamma$ hat nach Aussage 1.38(b) die Form $f(z) = az+b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Ist $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, so besitzt f wegen Eigenschaft (F) aus Definition 1.36 keine Fixpunkte. Weil für $a \neq 1$ die Funktion $f(z) = az + b$ in $z = \frac{b}{1-a} \in \mathbb{C}$ einen Fixpunkt besitzt, muss $a = 1$ sein. Ist $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, so ist natürlich auch $a = 1$. Deshalb existiert eine Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von der additiven Gruppe $\mathbb{C}$ mit $\Gamma = \Phi[\tilde{\Gamma}]$. Wegen Eigenschaft (H) aus Definition 1.36 ist $\tilde{\Gamma}$ diskret in $\mathbb{C}$, also ein sogenanntes *Gitter*.

Wenn $\tilde{\Gamma} = \{0\}$ ist, so liegt Fall (E) vor. Andernfalls wählen wir $\omega_1 \in \tilde{\Gamma} \setminus \{0\}$ mit minimalem Betrag in $\tilde{\Gamma} \setminus \{0\}$. Offenbar ist $\mathbb{Z}\omega_1 \subset \tilde{\Gamma}$. Wenn sogar $\mathbb{Z}\omega_1 = \tilde{\Gamma}$ ist, so liegt Fall (Z) (mit $\omega = \omega_1$) vor. Andernfalls wählen wir $\omega_2 \in \tilde{\Gamma} \setminus (\mathbb{Z}\omega_1)$ mit minimalem Betrag in $\tilde{\Gamma} \setminus (\mathbb{Z}\omega_1)$. Dann sind ω_1 und ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, und es gilt $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \tilde{\Gamma}$. Tatsächlich behaupten wir, dass sogar $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \tilde{\Gamma}$ ist, und somit Fall (T) vorliegt. Sei $\omega \in \tilde{\Gamma}$ gegeben. Dann liegt ω jedenfalls in einem abgeschlossenen Parallelogramm in $\mathbb{C}$, dessen Ecken in $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ liegen und dessen Diagonalen die Längen $|\omega_1 \pm \omega_2|$ haben. Deshalb gibt es ein $\omega' \in \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, nämlich eine der Ecken des besagten Parallelogramms, so dass für $\omega - \omega' \in \tilde{\Gamma}$ gilt:

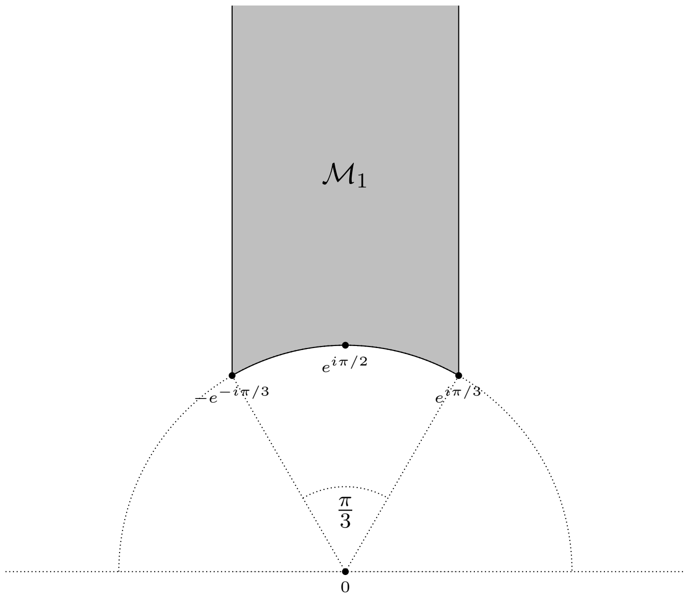
$$|\omega - \omega'| \leq \tfrac{1}{2}|\omega_1 \pm \omega_2| < \tfrac{1}{2}|\omega_1| + \tfrac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2| .$$

Dabei ist die zweite Ungleichung strikt, weil ω_1, ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Weil ω_2 mit in $\tilde{\Gamma} \setminus (\mathbb{Z}\omega_1)$ minimalem Betrag gewählt war, muss $\omega - \omega' \in \mathbb{Z}\omega_1$ und somit $\omega = \omega' + k\omega_1 \in \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) sein. □

1.40 Aussage. Jeder komplexe Torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2)$ ist biholomorph zu einem komplexen Torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\tau = \omega_2/\omega_1$ ist eine mögliche Wahl. Jedoch gibt es genau ein derartiges τ in

$$\mathcal{M}_1 := \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| \geq 1, \mathrm{Im}(\tau) > 0, -\tfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq \tfrac{1}{2}\} \ / \ \sim ,$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ die Punkte τ auf dem Rand des obigen Gebiets mit $-\bar{\tau}$ identifiziert. Deshalb ist $\mathcal{M}_1$ der *Modulraum* [moduli space] der komplexen Tori.



Beweis. Zwei komplexe Tori sind offenbar genau dann zueinander biholomorph, wenn die zugehörigen Gitter in $\mathbb{C}$ durch eine biholomorphe Abbildung ineinander überführt werden. Mit $\tau = \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ erfüllt die biholomorphe Abbildung $f(z) = \omega_1 z$ offenbar $f(1) = \omega_1$ und $f(\tau) = \omega_2$, und bildet somit das Gitter $\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$ auf das Gitter $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ ab. Ist nun ein $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gegeben, so wird das Gitter $\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$ durch eine geeignete Verkettung der folgenden drei bi-(anti)-holomorphen Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in ein Gitter $\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tilde{\tau}$ überführt, wobei $\tilde{\tau} \in \mathcal{M}_1$ ist:

- $f_1(z) = \tau^{-1} z$ (Skalierung um τ^{-1})
- $f_2(z) = -z$ (Spiegelung am Ursprung)
- $f_3(z) = z + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ (Verschiebung um ganzzahlige Vielfache von 1).

Wir „drücken“ uns für den Moment vor dem Beweis, dass für $\tau, \tilde{\tau} \in \mathcal{M}_1$ das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$ nur dann durch eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf das Gitter $\tilde{\Gamma} = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tilde{\tau}$ abgebildet werden kann, wenn $\tau = \tilde{\tau}$ ist. □

1.41 Aussage. Es existiert keine auf $\widehat{\mathbb{C}}$ frei operierende Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, außer $\Gamma = \{\mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}\}$.

Weil $\widehat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist, wäre jede Unterlagerung unter $\widehat{\mathbb{C}}$ regulär. Aussage 1.41 zeigt deshalb in Verbindung mit Satz 1.37(c): Es gibt keine nicht-trivialen holomorphen Unterlagerungen unter $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis von Aussage 1.41. Jedes $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ hat einen Fixpunkt in $\widehat{\mathbb{C}}$: Ein solches f ist nämlich nach Aussage 1.38(a) eine Möbius-Transformation, das heißt von der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. Dieses f hat im Fall $c \neq 0$ Fixpunkt(e) in $z = \frac{d-a\pm\sqrt{(d-a)^2+4b}}{2c}$, und im Fall $c = 0$ einen Fixpunkt in $z = \infty$. Deshalb kann keine Untergruppe $\Gamma \neq \{\mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}\}$ von $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ Bedingung (F) aus Definition 1.36 erfüllen. □

1.6 Die universelle Überlagerung

Zu jedem topologischen Raum bzw. Riemannschen Fläche Y existiert eine Überlagerung $\pi : \tilde{Y} \to Y$, für die $\tilde{Y}$ einfach zusammenhängend ist. $\tilde{Y}$ und π sind im Wesentlichen eindeutig bestimmt, und jede andere Überlagerung über Y lässt sich in π wiederfinden, deshalb nennt man π die *universelle Überlagerung* von Y.

1.42 Definition. Eine Überlagerung $\pi : \tilde{Y} \to Y$ eines wegzusammenhängenden topologischen Raums Y heißt *universell* [universal], wenn $\tilde{Y}$ einfach zusammenhängend ist.

Die folgende Aussage zeigt, warum „universelle" Überlagerungen so genannt werden:

1.43 Aussage. Sei Y ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $\pi : \tilde{Y} \to Y$ „eine" universelle Überlagerung von Y. Ist $\sigma : X \to Y$ eine weitere Überlagerung von Y, so existiert eine Überlagerung $\tau : \tilde{Y} \to X$, so dass $\sigma \circ \tau = \pi$ ist.

Zusatz. Sind $X, Y, \tilde{Y}$ Riemannsche Flächen, und sind π und σ holomorph, so kann auch τ holomorph gewählt werden.

Beweis. Die Gleichung $\sigma \circ \tau = \pi$ besagt, dass die gesuchte Abbildung τ ein Lift von π bezüglich der Überlagerung σ ist. Weil $\tilde{Y}$ einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz von τ als stetige Abbildung aus Satz 1.32. Es verbleibt zu zeigen, dass τ eine Überlagerung ist. Sei $x \in X$ und $y = \sigma(x) \in Y$. Dann existiert eine Umgebung $V(y)$ von y in Y, über der sowohl π als auch σ trivial ist. Für $\tilde{y} \in \pi^{-1}[\{y\}]$ sei jeweils $U(\tilde{y})$ die Umgebung von $\tilde{y}$ in Y, so dass $\pi|_{U(\tilde{y})} : U(\tilde{y}) \to V(y)$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist für jedes $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ mit $\tau(\tilde{y}) = x$ die Umgebung $V = \tau(U(\tilde{y}))$ von $\tilde{y}$ unabhängig, und $\tau|_{U(\tilde{y})} : U(\tilde{y}) \to V$ jeweils ein Homöomorphismus. Also ist τ über V trivial.

In der Situation des Zusatz ist τ als holomorpher Lift einer holomorphen Abbildung selber holomorph. □

Aus dieser Aussage ergibt sich auch, dass die universelle Überlagerung eines Raums Y im Wesentlichen eindeutig ist:

1.44 Korollar. Sind $\pi : \tilde{Y} \to Y$ und $\hat{\pi} : \hat{Y} \to Y$ „zwei" universelle Überlagerungen desselben wegzusammenhängenden topologischen Raums Y, so existiert ein Homöomorphismus $F : \tilde{Y} \to \hat{Y}$ mit $\hat{\pi} \circ F = \pi$.

Zusatz. Sind $Y, \tilde{Y}, \hat{Y}$ Riemannsche Flächen und sind $\pi, \hat{\pi}$ holomorph, so ist F biholomorph.

Beweis. Nach Aussage 1.43 existiert eine Überlagerung $F : \tilde{Y} \to \hat{Y}$ mit $\hat{\pi} \circ F = \pi$. Weil $\tilde{Y}$ einfach zusammenhängend ist, existiert nach Satz 1.32 ein Lift $G : \hat{Y} \to \tilde{Y}$ von $\mathrm{id}_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \to \tilde{Y}$ bezüglich F. Das bedeutet $G \circ F = \mathrm{id}_{\tilde{Y}}$. Somit ist F injektiv und daher ein Homöomorphismus. □

1.45 Satz. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dessen Topologie eine Umgebungsbasis von einfach zusammenhängenden Mengen besitzt. Dann existiert ein einfach zusammenhängender topologischer Raum $\tilde{X}$ mit einer universellen Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$.

Zusatz. Wenn X eine Riemannsche Fläche ist, ist die Bedingung über die Umgebungsbasis automatisch erfüllt. In diesem Fall ist auch $\tilde{X}$ eine Riemannsche Fläche und die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ holomorph.

Beweis. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in X$ und betrachten die Menge $\mathcal{C}$ der stetigen Kurven $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = x_0$. Auf $\mathcal{C}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$, indem wir für $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ sagen, dass $\alpha \sim \beta$ gilt, wenn $\alpha(1) = \beta(1)$ ist, und α und β mit festgehaltenen Endpunkten zueinander homotopieäquivalent sind. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ sind also die Homotopieklassen von Kurven in X mit Startpunkt x_0. Die Menge dieser Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\tilde{X} = \mathcal{C}/\sim$. Außerdem definieren wir eine Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X,\ [\alpha] \mapsto \alpha(1)$.

Wir versehen $\tilde{X}$ mit einer Topologie: Sei $\tilde{x} = [\alpha] \in \tilde{X}$ gegeben und $x = \pi(\tilde{x}) = \alpha(1) \in X$. Sei U eine offene, einfach zusammenhängende Umgebung von x in X. Wir ordnen U die Teilmenge $\tilde{U}$ von $\tilde{X}$ zu, deren Homotopieklassen durch Aneinanderfügung von $[\alpha]$ mit beliebigen stetigen Wegen in U entsteht. Indem wir $\tilde{x}$ und U variieren, erhalten wir ein System von Teilmengen von $\tilde{X}$. Die Topologie auf $\tilde{X}$ definieren wir dadurch, dass dieses System von Teilmengen Basis der Topologie sein soll. Hierdurch wird offenbar $\tilde{X}$ zusammenhängend, und die Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$ stetig und offen. Weil die Urbildmenge $\pi^{-1}[\{x\}]$ jeweils isomorph zur Fundamentalgruppe von X ist, ist π tatsächlich eine Überlagerung.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Dazu sei $\tilde{x}_0 = [\alpha_0] \in \pi^{-1}[\{x_0\}]$. Eine geschlossene Schleife in $\tilde{X}$ mit Start- und Endpunkt $\tilde{x}_0$ entspricht einer Decktransformation von π mit dem Fixpunkt $\tilde{x}_0$. Diese Decktransformation ist also mit $\mathrm{id}_{\tilde{X}}$ identisch, was bedeutet, dass die Schleife in $\tilde{X}$ zusammenziehbar ist.

In der Situation des Zusatzes besitzt X eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden Mengen, weil dies auf den Bildbereich der Kartenabbildungen $\mathbb{C}$ zutrifft. Durch Zurückziehen von Karten von X mittels π auf Umgebungen, auf denen π trivial ist, erhalten wir einen Atlas für $\tilde{X}$, der $\tilde{X}$ zu einer Riemannschen Fläche macht. Diesbezüglich ist π offensichtlich holomorph. □

1.46 Korollar. Zu jeder Riemannschen Fläche X existiert eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\tilde{X}$ und eine frei auf $\tilde{X}$ operierende Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\tilde{X})$, so dass X zu $\tilde{X}/\Gamma$ biholomorph ist. Hier ist $\pi : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung von X und $\Gamma = \mathrm{Deck}(\pi)$.

Beweis. Die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ existiert nach Satz 1.45, und sie ist nach Aufgabe 1.35(b) regulär. Nach Satz 1.37(c) ist X daher biholomorph äquivalent zu $\tilde{X}/\Gamma$ mit $\Gamma = \mathrm{Deck}(\pi)$. □