28. Vorlesung

04.06.2020 (1)

$(X', \mathcal{O}_{X'})$

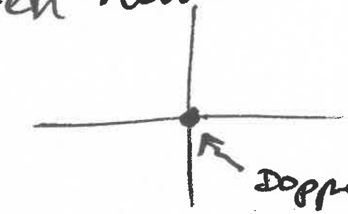
X': Hausdorff-raum

$\mathcal{O}_{X'}$: Garbe von $\mathbb{C}$-Algebren (der holo. Fktn auf X').

Beispiele → Modellraum einer komplexen Kurve

$(z,w) \in \mathbb{C}^2$

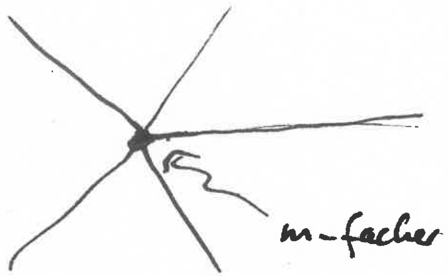
(c) $X' = V(z \cdot w)$



(d) $X' = V(z^m - w^m)$

$m \in \mathbb{N}$

$(0,0)$ Singularität.



$(m = 5)$

$g = (z^m + w^m)|_{X'}$ holo.

↑

Nullstelle $(z,w) \in X'$: $\left.\begin{array}{l} z^m + w^m = 0 \\ z^m - w^m = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow z = w = 0.$

$\underline{m=2:}$

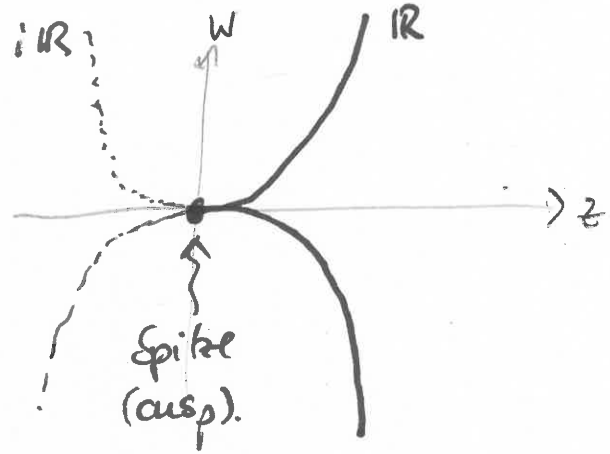
$z^2 - w^2 = \underbrace{(z-w)}_{=:\tilde{z}} \cdot \underbrace{(z+w)}_{=:\tilde{w}}$

$= \tilde{z} \cdot \tilde{w}.$

⇝ Doppelpunkt.

②

e) Neil'sche Parabel : $X' = V(w^2 - z^3)$.



$(X, \mathcal{O}_{X'})$

Df (a) Ein geringter Raum ist ein Paar $(X', \mathcal{O}_{X'})$ bestehend aus einem Hausdorffraum X' und einer Garbe von Ringen (komm. Ringe mit Eins) $\mathcal{O}_{X'}$.

$\mathbb{C}$-geringter Raum : $\mathcal{O}_{X'}$ ist sogar Garbe von $\mathbb{C}$-Algebren.

(b) Ein $\mathbb{C}$-geringter Raum $(X', \mathcal{O}_{X'})$ ist eine **komplexe Kurve**, wenn es zu jedem $x \in X'$ eine offene Umgebung $U \subset X'$ von x gibt, s.d. $(U, \mathcal{O}_{X'}|_U)$ isomorph zu einem Modellraum einer komplexen Kurve ist.

Die Schnitte von $\mathcal{O}_{X'}$ heißen dann **holomorphe Funktionen**.

(c) $x \in X'$ **regulär**, wenn es eine Umgebung $U \subset X'$ von x gibt, s.d. $(U, \mathcal{O}_{X'}|_U)$ isomorph zu einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist (als Modellraum). Sonst heißt x' **singulär** oder eine **Singularität**.

Beispiele

- Jeder Modellraum ist eine komplexe Kurve.
- X Riem. Fläche $\Rightarrow$ $(X', \mathcal{O}_{X'})$ ist komplexe Kurve ohne Singularitäten.

Aussage $(X^{\#}, \mathcal{O}_{X^{\#}})$ eine komplexe Kurve ohne Singularitäten.
Dann ex. ein Atlas $\mathcal{A}$ auf X, s.d. $(X, \mathcal{A})$ Riemannsche Fläche.

$(X', \mathcal{O}_{X'})$ komplexe Kurve.

$\rightsquigarrow \mathcal{M}_{X'}: \mathcal{M}_{X'}(\mathcal{U}) := \{ \underbrace{\frac{f}{g}}_{: \mathcal{U} \to \hat{\mathbb{C}}} \mid f, g \in \mathcal{O}_{X'}(\mathcal{U}), g \neq 0 \}$.

Garbe der meromorphen Fkt'en

⚠ Es kann lokal beschränkte, meromorphe Fkt'en geben, die nicht holomorph sind.

~~$k = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$~~
~~$\Updownarrow$~~
~~$(z-z_0)^{-k} \cdot f$ in z_0 holomorph und $\neq 0$ sein.~~

Beispiel: $X' = V(z \cdot w)$.

$f = \frac{z^2 - w^2}{z^2 + w^2}$ meromorph, beschränkt

in $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar, erst recht nicht hol.

$f \in \overline{\mathcal{O}}_{X'}(X')$.

$\overline{\mathcal{O}}_{X'}$ = Garbe der lokal beschränkten, meromorphen Funktionen.

$\mathcal{O}_{X'} \subset \overline{\mathcal{O}}_{X'} \subset \mathcal{M}_{X'}$.

$\overline{\mathcal{O}}_{X'}$ ist der integrale Abschluss von $\mathcal{O}_{X'}$ in $\mathcal{M}_{X'}$, d.h.

$\varphi \in \mathcal{M}_{X',x}$ ist in $\overline{\mathcal{O}}_{X',x}$ genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathcal{O}_{X',x}$ gibt mit

$$\varphi^n + \alpha_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + \alpha_1\varphi + \alpha_0 = 0.$$

[Für Riem. Flächen ist $\overline{\mathcal{O}}_X = \mathcal{O}_X$.]

Df +Aussage $x \in X'$. $\leadsto$ $\delta_x = \dim(\overline{\mathcal{O}}_{X',x} / \mathcal{O}_{X',x}) \overset{\text{Aussage}}{<} \infty$

δ-Invariante.

Normalisierung

$(X, \mathcal{O}_X)$ Riemannsche Fläche ohne Singularitäten.
braucht nicht zusammenhängend zu sein.

$\downarrow \pi$ verzweigte, einblättrige Überlagerung.

$(X', \mathcal{O}_{X'})$ komplexe Kurve mit Singularitäten

Die Verzweigungspunkte von π sind genau die Singularitäten von X', dort ist die Verzweigungsordnung gerade die δ-Invariante.

Außerdem $\pi_* \mathcal{O}_X = \overline{\mathcal{O}}_{X'}$.

Aussagen: Zu jeder komplexen Kurve gibt es eine Normalisierung.
Diese ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beispiel

$V(z \cdot w) = X'$ $\xleftarrow[\pi]{\text{Normalisierung}}$ zwei Kopien von $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$

$X = \mathbb{C}_1 \dot\cup \mathbb{C}_2$.

Konstruktion von komplexen Kurven X'

X Riemannsche Fläche, $\mathcal{O}_X$

$S \subset X$ diskrete Teilmenge

R Äquivalenzrelation auf S.

(X, S, R) beschreibe X' als top. Raum:

Setze R auf X fort, so dass ~~für~~ $x \in X \setminus S$ nur mit sich selbst in Relation steht.

$X' = X / R$. Hausdorffraum.

$\pi : X' \longrightarrow X$ stetig, verzweigte, 1-blättrige Überlagerung.

Jedenfalls muss $\overline{\mathcal{O}}_{X'} = \pi_* \mathcal{O}_X$ sein.

$$\begin{matrix} \overline{\mathcal{O}}_{X'} \\ \cup \\ \mathcal{O}_{X'} \end{matrix}$$

reguläre Pkte x:

$$\mathcal{O}_{X',x} = \overline{\mathcal{O}}_{X',x}$$

Wähle $\mathcal{O}_{X'}$ als Untergarbe von $\overline{\mathcal{O}}_{X'} = \pi_* \mathcal{O}_X$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in X'$ ist $\delta_x = \dim \left(\overline{\mathcal{O}}_{X',x} / \mathcal{O}_{X',x} \right) < \infty$
- —— " —— $\mathcal{O}_{X',x} \subset \mathbb{C} + \{ f \in \overline{\mathcal{O}}_{X',x} \mid \pi^* f(\tilde{x}) = 0$ für alle $\tilde{x} \in \pi^{-1}[\{x\}] \}$.

  Radikal von $\overline{\mathcal{O}}_{X'}$.

Dann ist $(X', \mathcal{O}_{X'})$ eine komplexe Kurve, und $\pi : (X, \mathcal{O}_X) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ ihre Normalisierung.

<u>Beispiel</u> X Riem. Fläche, $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$.

$S = \{x_1, x_2\}$; $R = S * S$. $\rightsquigarrow X'$, $\pi : X \to X'$ $\quad \pi(x_1) = \pi(x_2) =: x \in X'$.

$$\mathcal{O}_{X',x} \subset \overline{\mathcal{O}}_{X',x} = (\pi_* \mathcal{O}_X)_x = \mathcal{O}_{X,x_1} \oplus \mathcal{O}_{X,x_2}$$

Wähle $\mathcal{O}_{X',x} = \{ f = (f_1, f_2) \in \overline{\mathcal{O}}_{X',x} \mid f_1(x_1) = f_2(x_2) \}$. $\rightsquigarrow$ Doppelpunkt.

Mache Theorie für kompakte, komplexe Kurven

↳ Riemann-Roch
↳ Serre-Dualität
} & Folgerungen.

Divisoren? $D \rightsquigarrow \mathcal{O}_D$
$D: X \to \mathbb{Z}$

$D = (f)$ (meromorphe Fkt.), $\boxed{\mathcal{O}_D = f \cdot \mathcal{O}} \subset \mathcal{M}$

Verallgemeinere nicht D, sondern $\mathcal{O}_D$.

1. Idee: Eine Untergarbe $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_X$, heißt Divisor, wenn $\mathcal{S}$ lokal von der Form $f \cdot \mathcal{O}_X$, mit einer mero. Fkt. f ist. lokal frei

Diese Divisoren gehören zu holo. Linienbündeln.

2. Idee: Eine Untergarbe $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_X$, heißt verallgemeinerte Divisor, wenn $\mathcal{S}$ lokal von der Form $f_1 \cdot \mathcal{O}_X + \dots + f_k \cdot \mathcal{O}_X$, mit mero. Fkt'n $f_1, \dots, f_k$ ist. $\rightsquigarrow$ Für diese gilt R-R + Serre-Dualität.

10

Geschlecht: $\dim H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) =: g'$ arithmetisches Geschlecht

X' kompakt

$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) =: g$ geometrisches Geschlecht

$$g' = g + \sum_{x \in X'} \delta_x$$

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix}.$$

$$\Sigma = \{ (\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2 \mid \nu^2 = \underbrace{\tfrac{1}{4}\Delta(\lambda)^2 - 1}_{=: a(\lambda)} \}.$$

komplexe Kurve

multiplier curve

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & & (\lambda,\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & & \lambda \end{array}$$

Eigenvektor $\left(\dfrac{\beta(\lambda)}{\nu + \frac{1}{2}(\delta(\lambda) - \alpha(\lambda))}, 1 \right).$

kann man das als holo. Linienbündel auf Σ auffassen.

$$\varphi = \frac{\beta}{\nu + \frac{1}{2}(\delta - \alpha)} \cdot \mathcal{O}_\Sigma + 1 \cdot \mathcal{O}_{\Sigma}$$

ist verallg. Divisor

(11)

Normalis. $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & X'' \arrow[dl, "\pi'"] \\ \Sigma, \mathcal{L} & \end{tikzcd}$

$\boxed{\mathcal{L}'' = (\pi')^* \mathcal{L}}$

1-bl. Überlagerungen

beschreibt Linienbündel auf X''.

Kann X'' so gewählt werden, dass $\mathcal{L}''$ lokal frei ist?

Weil Σ eine ~~zwei~~ verzweigte zweibl. Überlagerung ist: ja.

X'' $\mathcal{L}$-halfway normalisation.

Spektralkurve

$(X'', \mathcal{L}'')$

Geometrie.

Klasse "finite type" von Lösungen von integrablen Systemen

1:1 $\longleftrightarrow$

komplexe Analysis

Algebra

$(X'', \mathcal{L}'')$.

Spektraldaten.

algebro-geometrischer Zusammenhang.