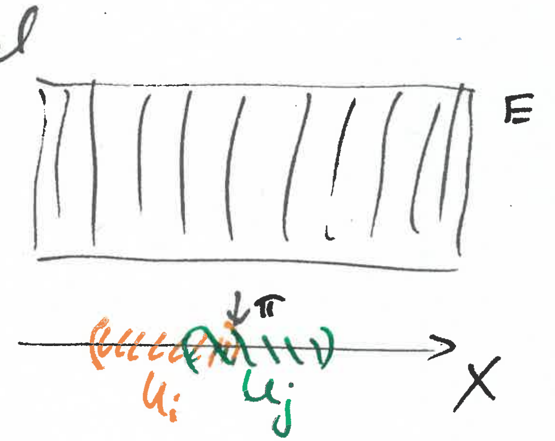
27. Vorlesung

03.06.2020

1



Aussage X Riem. Fläche, $\pi : E \to X$ Linienbündel

$(U_i, h_i)_{i\in I}$ ein Atlas von π.

$i,j \in I \rightsquigarrow$ Dann ex. eine stetige Fkt.

Übergangsfunktionen $\longrightarrow g_{ij} : U_i \cap U_j \to \boxed{\mathbb{C}^*}$

s.d. für $(x,v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$ gilt

$$h_j(x, g_{ij}(x)v) = h_i(x, v) \quad \in \{x\} \times \mathbb{C} \subset U_i \times \mathbb{C}$$

$i,j,k \in I$, $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$:

$$h_k(x, g_{ik}(x)v) = h_i(x,v) \overset{}{\underset{*}{=}} h_j(x, g_{ij}(x)v) = h_k(x, g_{jk}(x) g_{ij}(x) v)$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}}$$

$\rightsquigarrow$ Kozykelbedingung.

2

Df Das Linienbündel π heißt <u>holomorph</u>, wenn es einen Atlas für π gibt, so dass die Übergangsfkt'en

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$$

holomorph. sind. $\Rightarrow$ $\boxed{(g_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)}$, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$.

$\Downarrow$

$\xi = [g_{ij}] \in \boxed{H^1(X, \mathcal{O}^*)}$.

(g_{ij}), $(\tilde{g}_{ij})$ kohomolog

$\Leftrightarrow$ Linienbündel biholomorph äquiv.

Raum der Isomorphieklassen von holomorphen Linienbündeln auf X

$\cong H^1(X, \mathcal{O}^*)$ <u>Picard-Varietät</u> $\cong \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Div}_{\mathrm{Haupt}}(X)$.

Schnitt von π: Abbildung $f : X \to E$ mit $\pi \circ f = \mathrm{id}_X$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & X \end{tikzcd}$$

Definiere mittels lokaler Trivialisierung: f holomorph, meromorph

<u>Beispiel</u> $X = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}^*$

$\left.\begin{array}{l}\text{integrables System} \\ \text{periodische Lösung}\end{array}\right\} \rightsquigarrow M(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix} : X \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$.

holomorph. (<u>Monodromie</u>)

<u>Eigenwerte μ:</u> $0 = \det(\mu \mathbb{1} - M(\lambda)) = \begin{pmatrix} \mu-\alpha & -\beta \\ -\gamma & \mu-\delta \end{pmatrix} = (\mu-\alpha)(\mu-\delta) - \beta\gamma$

$$= \mu^2 - \underbrace{(\alpha+\delta)}_{= \operatorname{tr} M(\lambda) =: \Delta(\lambda)}\mu + \underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{= \det M(\lambda) = 1}$$

$$= \mu^2 - \Delta(\lambda)\mu + 1 = (\underbrace{\mu - \tfrac{1}{2}\Delta(\lambda)}_{=:\nu})^2 + 1 - \tfrac{1}{4}\Delta(\lambda)^2$$

$\nu = \mu - \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$ $\quad \boxed{\nu^2 = \frac{1}{4}\Delta(\lambda)^2 - 1 =: a(\lambda)}$ $\quad \boxed{\nu^2 = a(\lambda).}$

<u>Voraussetzung:</u>

- $a(\lambda)$ Polynom von Geschlecht $2g+2$
- $a(\lambda)$ ohne mehrfache Nullstelle.

$\rightsquigarrow \Sigma = \{(\lambda,\nu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \nu^2 = a(\lambda)\} \cup \{\infty_\pm\}$. über $\lambda = \infty$.

hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht g.

|| multiplier curve

|| Spektralkurve

④

<u>Eigenvektoren</u> $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\mu = \nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$:

$$(\alpha(\lambda) - \mu)\, v_1 + \beta(\lambda) v_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma(\lambda) v_1 + (\delta(\lambda) - \mu)\, v_2 = 0.$$

$$(v_1, v_2) = (\beta(\lambda),\ \underbrace{\mu - \alpha(\lambda)}) $$

$$= \nu + \tfrac{1}{2}\Delta(\lambda) - \alpha(\lambda)$$

$$= \nu + \tfrac{1}{2}(\delta(\lambda) - \alpha(\lambda)).$$

<u>Voraussetzung</u>: $\beta(\lambda)$ und $\mu - \alpha(\lambda)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.

$$f : \cancel{X}\ \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad (\lambda, \nu) \longmapsto \left(\beta(\lambda),\ \nu + \tfrac{1}{2}(\delta(\lambda) - \alpha(\lambda))\right)$$ holomorph.

Eigenvektor von $M(\lambda)$ zum Eigenwert $\mu = \nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$.

$$E := \dot{\bigcup_{x \in \Sigma}} \left(\{x\} \times \mathbb{C} \cdot f(x)\right)$$ holomorphes Linienbündel

$$\downarrow \pi$$

$$x \in X.$$

$f : X \to E$ Schnitt in ~~die~~ Linienbündel ~~π~~.

Algebra / komplexe Analysis

$(X,\ \pi : E \to X)$ Linienbündel auf X

$\xleftrightarrow{1:1}$ algebro-geometrischer Zusammenhang.

Geometrie

~~Lösg~~ periodische Lösg des Integrablen Systems.

X Riem. Fläche $\longrightarrow$ X top. Raum

$\mathcal{O}_X$ Garbe der holomorphen Fkt'en.

$(\rightsquigarrow \mathcal{O}_X^*, \mathcal{M}_X)$.

$$\underset{\text{top. Raum}}{\underset{\uparrow}{(X}}, \underset{\substack{\text{Garbe von Ringen auf } X \\ \mathbb{C}\text{-Algebren}}}{\underset{\uparrow}{\mathcal{O}})}$$

lokal so aussehen wie ein „Modellraum".
d.h. ~~der~~ Modellraum ist beschrieben ~~durch~~ als Nullstellenmenge von holomorphen Fkt- in n Variablen.

+ 1-Dimensionalität.

komplexe Kurve.

(komplexe Dimension 1
$\hat{=}$ reelle Dimension 2).

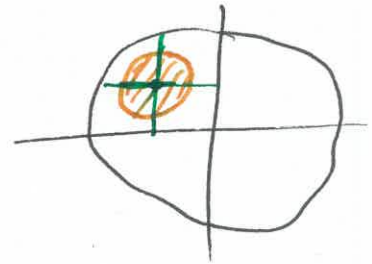
$D \subset \mathbb{C}^n$ Gebiet (offene, zshgde Teilmenge)

$f : D \to \mathbb{C}$ <u>holomorph</u>

$:\Leftrightarrow$ f ist um jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ ~~an~~ komplex-analytisch, d.h. in eine komplexe Potenzreihe in n Variablen entwickelbar.

<u>Satz von Hartogs</u>. [schwierig].

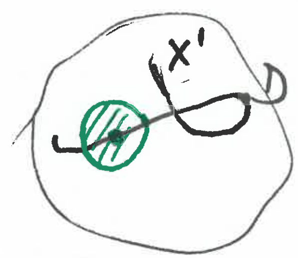
f bzgl. jeder Variable partiell holomorph $\Rightarrow$ f holomorph.



In mehreren Variablen ist die NSt-Menge einer holo. Fkt. i.A. <u>nicht</u> diskret.

$f(z_1, z_2) = z_1 - z_2$.

NSt-menge $= \{(z,z) \in \mathbb{C}^2\}$.



Df $D \subset \mathbb{C}^n$ Gebiet, $f_1, \dots, f_k : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

$\mathcal{O}_D$ Garbe der holo Fkt'en auf D.

- $X' = \{x \in D \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$. Teilraumtopologie von $\mathbb{C}^n$
  $=: V(f_1, \dots, f_k) \rightsquigarrow$ Hausdorffraum, abzählbare Topologie.

- $(f_1, \dots, f_k) := \mathcal{O}_D \cdot f_1 + \dots + \mathcal{O}_D \cdot f_k$.
  Garbe von Idealen, der holo. Fkt'en, die auf X' verschwinden.

$\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_D / \text{Ideal}$

R Ring, $I \subset R$ Untergruppe

I Ideal $\Leftrightarrow$ $R \cdot I \subset I$, $I \cdot R$

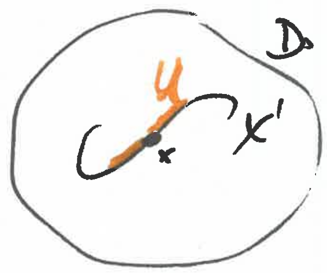
$\mathcal{O}_{X'} = \left(\mathcal{O}_D / (f_1, \dots, f_k)\right)\Big|_{X'}$ Garbe von Ringen.

$(X', \mathcal{O}_{X'})$ komplexer Modellraum.

X'

Die Schnitte von ~~$\mathcal{O}$~~ $\mathcal{O}_{X'}$ heißen holomorphe Funktionen auf X'.

Df Der komplexe Modellraum $(X', \mathcal{O}_{X'})$ heißt <u>1-dimensional</u> oder <u>Modellraum einer komplexen Kurve</u>, wenn es zu jedem $x \in X'$ eine Umgebung $U \subset X'$ und eine nicht-konst. holo. Fkt. $g: U \to \mathbb{C}$ gibt, s.d. x eine diskrete Nullstelle von g ist.

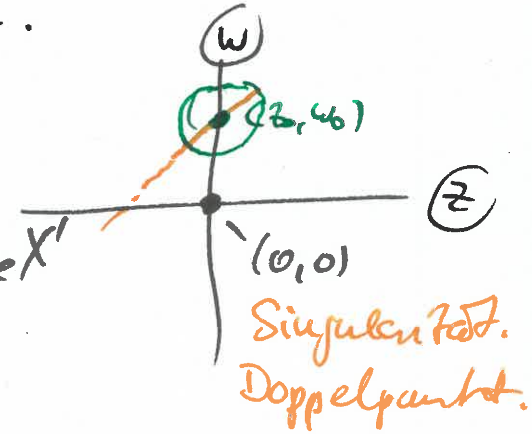


<u>Beispiele</u>

(a) $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet. $\rightsquigarrow$ $\overset{G}{\overset{\shortparallel}{V(0)}} = (G, \mathcal{O}_G)$ Modellraum einer kompl. Kurve.

$V(1) = \emptyset$ leerer Raum.

(c) $D = \mathbb{C}^2 \ni (z, w)$ $\quad X' = V(z \cdot w)$. Modellraum einer komplexen Kurve X'



$\ulcorner$ <u>zu dim = 1:</u> $(z_0, w_0) \in X'$ gegeben.

$$g(z, w) = (z - z_0) + (w - w_0) \lrcorner$$