26. Vorlesung

28.05.2020 — 1

X, Y kompakte Riem. Flächen, $f: X \to Y$ holomorph, nicht-konstant
$\rightsquigarrow$ f verzweigte Überlagerung. $\rightsquigarrow$ Blätterzahl (Grad) n
Verzweigungspunkte,
totale Verzweigungsordnung b_f.

Riemann-Hurwitz: $g_X = \frac{1}{2} b_f + n_f (g_Y - 1) + 1$

kompakt. Geschlecht g

Df: X heißt **hyperelliptisch**, wenn es auf X eine nicht-konstante mero. Fkt. $f: X \to \hat{\mathbb{C}}$ mit genau zwei Polstellen (gezählt gemäß Vielfachheit) gibt

f ist dann verzweigte zweiblättrige Überlagerung über $\hat{\mathbb{C}}$.

$b_f = 2g+2$

<u>Beispiel</u>

$a = a(\lambda) \in \mathbb{C}$ Polynom vom Grad $2g+2$, normiert, nur <u>einfache</u> Nullstellen.

<u>Beh.</u> Die Gleichung $\nu^2 = a(\lambda)$ definiert eine hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht g.

$\Sigma^0 = \{ (\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2 \mid \underline{\nu^2 = a(\lambda)} \}$. zshgder Hausdorffraum, abzählbare Topologie.

2-blättrig $f : \Sigma \to \hat{\mathbb{C}}$, $(\lambda,\nu) \mapsto \lambda$

$w : \Sigma \to \hat{\mathbb{C}}$, $(\lambda,\nu) \mapsto \nu$ $(2g+2)$-blättrig.

$\overset{\varphi}{(\lambda_0, \nu_0)}$ Karte bei (λ_0, ν_0) ?

- $a(\lambda_0) \neq 0$. $\Rightarrow \nu_0 \neq 0$. In der Nähe ist $\nu = \sqrt{a(\lambda)}$ biholo in λ.
  Das bedeutet, dass $(\lambda,\nu) \mapsto \lambda$ Karte bei (λ_0, ν_0) ist.
- $a(\lambda_0) = 0$. $\overset{\Rightarrow \nu_0 = 0}{\text{In}}$ <u>der Nähe</u> von (λ_0, ν_0) ist $a(\lambda)$ biholo. äquiv. zu $\lambda - \lambda_0$.
  also Σ^0 biholo äquiv. zu $\{ \nu^2 = \lambda - \lambda_0 \}$. Daher ist $(\lambda, \nu) \mapsto \nu$ eine Karte bei $(\lambda_0, \nu_0) = (\lambda_0, 0)$.

$\rightsquigarrow \Sigma^0$ eine Riemannsche Fläche.

$(\lambda, \nu) \mapsto \lambda$ verzweigte 2-blättrige Überlagerung, Verzweigungspunkte $=$ Nullstellen von a.

③

Bilde Σ aus $\Sigma^0_{\emptyset}$ durch „Kompaktifizierung":

Wir fügen zwei Punkte $\infty_\pm$ zu Σ^0 hinzu $\rightsquigarrow \Sigma$

so, dass $\underbrace{\big((\lambda,\nu)\mapsto\lambda\big)}_{=:f.}(\infty_\pm) = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$ nicht-Verzweigungspunkt.

$f:\Sigma \to \hat{\mathbb{C}}$ merom. Fkt. mit genau zwei Polstellen $(\infty_\pm)$

Σ kompakte Riemannsche Fläche. $\Rightarrow \Sigma$ hyperelliptisch.

Geschlecht von Σ? $2g_\Sigma + 2 = b_f = \#$ Nullstellen von $a = 2g+2$.

$\Rightarrow g_\Sigma = g$ $\square$

<u>Aussage</u> X kompakte Riem. Fläche vom Geschlecht g.

$g \leq 2 \Rightarrow X$ hyperelliptisch.

<u>Beweis</u>

Zeige: Es ex. $x_1, x_2 \in X$, s.d. mit $D = x_1 + x_2 \in \mathrm{Div}(X)$ gilt: $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$.

Dann $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ nicht-konstant. hat Pole in x_1, x_2.

$g \in \{0,1\}$: x_1, x_2 beliebig.

Riemann-Roch: $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \underbrace{1-g}_{\geq 0} + \underbrace{\deg(D)}_{=2} + \underbrace{i(D)}_{\geq 0} \geq 2$.

$g=2$: Wähle $\omega \neq 0$ holomorphe 1-Form auf X.

$D = (\omega)$, $\deg(D) = 2\overset{2}{\overset{\shortparallel}{g}} - 2 = 2$, $D \geq 0 \Rightarrow D = x_1 + x_2$.

$\Rightarrow i(D) = \dim H^1(X, \underbrace{\mathcal{O}_D}_{\cong \Omega}) = \dim H^1(X, \Omega) = 1$.

Riemann-Roch: $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - \underset{2}{\underset{\shortparallel}{g}} + \underbrace{\deg(D)}_{=2} + \underbrace{i(D)}_{=1} = 2$.

$\square$

Aussage

X hyperellipt. Rien. Fläche vom Geschlecht g

f mero Fkt. mit genau zwei Polen $y_1, y_2 \in X$ und Verzweigungspkte $x_1, \dots, x_{2g+2} \in X$ } OE paarweise verschieden.

Dann ex. eine weitere meromorphe Funktion w auf X mit

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (f - \underbrace{f(x_j)}_{\in\mathbb{C}}) =: RHS$$

Der Divisor von w ist $(w) = x_1 + \dots + x_{2g+2} - (g+1)\cdot(y_1 + y_2)$.

Beweis Die Frage ist, ob man aus $\prod(f - f(x_j))$ „die Wurzel ziehen kann" (auf X).

a) lokal? Ja.

- $x \neq x_1, \dots, x_{2g+2}, y_1, y_2$: $RHS(x) \neq 0$. Also ja.
- $x = x_j$: $b_f(x_j) = 1$: $ord_{x_j}(RHS) = 2$ Also ja.
- $x = y_j$: $ord_{x_j}(RHS) = -(2g+2)$ Also ja.

Wann kann man aus einer ~~holo.~~ mero. Fkt. h die Wurzel ziehen?

- Wenn $h(x_0) \neq 0$.
- Allgemeiner: Wenn $ord_{x_0}(h) \in 2\mathbb{Z}$.

b) global?

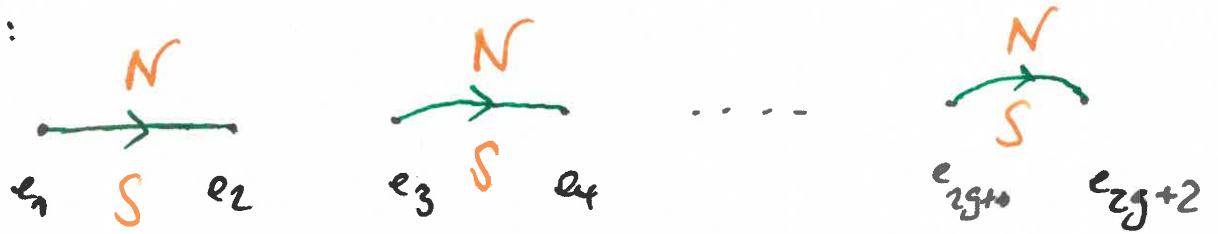
Konstruiere ein „Modell" $(\tilde{X}, \tilde{f})$ für (X, f).

→ zwei Kopien von $\hat{\mathbb{C}}$ miteinander verkleben. Kopie I
Kopie II.

$e_j := f(x_j) \in \mathbb{C}$. $\cancel{\#}\, f^{-1}[\{e_j\}] = \{x_j\}$

$e \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\} \Rightarrow \# f^{-1}[\{e\}] = 2$.

in $\hat{\mathbb{C}}$:



OE: Diese „Schlitze" sollen sich nicht schneiden.

Verklebe die nördliche N-Seite von Kopie I mit der S-Seite von Kopie II
und die S-Seite von Kopie I N-Seite von Kopie II.

Auf diese Weise bekommt man eine kompakte Riem. Fläche ~~X~~ $\tilde{X}$
zusammen mit einer mero. Fkt. $\tilde{f}: \tilde{X} \to \hat{\mathbb{C}}$.
mit Abbildungsgrad 2, und Verzweigungspunkte über $e_1, \dots, e_{2g+2}$.
$(\tilde{X}, \tilde{f}) \cong (X, f)$.

Nimm nun ein lokal definiertes w her.

Zeige: w lässt sich entlang jeder Kurve in X bzw $\tilde{X}$ analytisch fortsetzen, und zwar eindeutig.

$$w = \prod \sqrt{f - f(x_j)}, \quad f(x_j) = e_j$$

$$\tilde{w} = \prod \sqrt{z - e_j}$$

$\prod \sqrt{z-e_j}$ ändert bei analytischer Fortsetzung längs einer geschlossenen Kurve in $\hat{\mathbb{C}}$ genau dann das Vorzeichen, wenn die Summe der Umlaufszahlen um alle e_j ungerade ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Lift der Kurve nach $\tilde{X}$ nicht geschlossen ist, sondern zwei verschiedene Punkte $x, \hat{x}$ mit demselben Bildpunkt in $\hat{\mathbb{C}}$ miteinander verbindet. $x \neq \hat{x}$, $w(x) = -w(\hat{x})$.

Eine Wurzel $\sqrt{z-e_j}$ ~~än~~ wechselt entlang einer geschl. Kurve in $\hat{\mathbb{C}}$ genau dann das Vorzeichen, wenn die Umlaufszahl um e_j ungerade ist.

Deshalb lässt sich w global auf $\tilde{X}$ bzw. X definieren.

$\square$

$\dim H^0(X, \Omega) = g.$

Korollar: X, f, w wie zuvor.

$$\omega_j = \frac{f^{j-1}}{w} df \quad \text{für } j = 1, \ldots, g$$

sind Basis von $H^0(X, \Omega)$.

Beweis: Der wesentliche Punkt ist: $\omega_j \in H^0(X, \Omega)$ (holomorph).

f hat Verzw.punkte $x_1, \ldots, x_{2g+2}$, Polstellen y_1, y_2, Nullstellen y_3, y_4.

OE alle paarw. verschieden.

Da $(f) = y_3 + y_4 - y_1 - y_2$, $\quad (df) = x_1 + \ldots + x_{2g+2} - 2y_1 - 2y_2$.

$(w) = x_1 + \ldots + x_{2g+2} - (g+1)y_1 - (g+1)y_2$.

Also $(\omega_j) = (j-1)\cdot(f) - (w) + (df)$ $\quad 1 \leq j \leq g$

$$= \underbrace{((1-j)-2+(g+1))}_{=g-j}(y_1+y_2) + (j-1)(y_3+y_4) = \underbrace{(g-j)}_{\geq 0}(y_1+y_2) + \underbrace{(j-1)}_{\geq 0}(y_3+y_4)$$

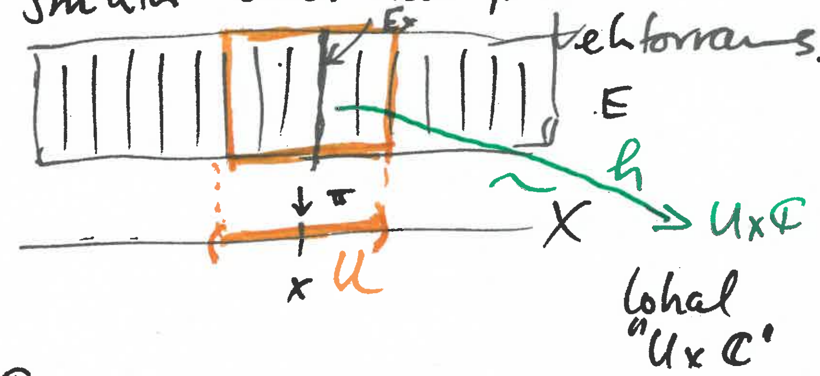
$\Rightarrow (\omega_j) \geq 0. \Rightarrow \omega_j$ ist holomorph. $\square$.

Linienbündel

X Riem. Fläche. $\quad x \in X \longmapsto E_x$ 1-dim. komplexer Vektorraum.

"holomorph"

Definition X Riem. Fläche, E top. Raum, $\pi : E \to X$ stetige Abbildung.
$E_x := \pi^{-1}[\{x\}]$ habe für $x \in X$ jeweils die Struktur eines komplex-1-dim. Vektorraums.
<u>Faser</u>. Es gebe für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ und ein Homöo. $h : \pi^{-1}[U] \to U \times \mathbb{C}$ mit:



a) h sei <u>fasertreu</u>, d.h. $h(E_{x'}) = \{x'\} \times \mathbb{C}$ für $x' \in U$

b) $x' \in U$: $pr_{\mathbb{C}} \circ h|_{E_{x'}} : E_{x'} \to \mathbb{C}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Dann heißt π <u>Linienbündel</u> <u>über X</u>.
h heißt <u>lokale Trivialisierung</u>.

Ein <u>Atlas</u> von π ist ein (U_i, h_i), s.d. $\mathcal{U} = (U_i)$ offene Überdeckung von X und h_i lok. Triv. über U_i ist.