25. Vorlesung 27.05.2020 (1)

Erinnerung: Serre-Dualität: $\longleftrightarrow$ Satz v. Riemann-Roch

1. Variante: $H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$

$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*$

2. Variante: $\langle\, ,\, \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to \mathbb{C}$, $(\omega, \xi) \mapsto \operatorname{Res}(\omega\xi)$

ist eine Paarung, d.h. nicht-entartet in beiden Argumenten

X, Y kompakte Riem. Fläche, $f : \overset{=g_X}{X} \to \overset{g_Y}{Y}$ holo. Abb., nicht konstant.

"verzweigte Überlagerung"

Satz von Riemann-Hurwitz: Zusammenhang zwischen g_X und g_Y via f.

②

$f: X \to Y$, $\quad z \quad w$, $\quad z(x)=0 \quad w(f(x))=0.$

$$w \circ f = \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0. \quad n \geq 1.$$

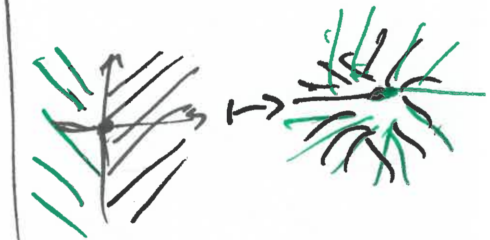
$n=1: \quad = cz + \cdots$

$n \geq 2: \quad = cz^n + \cdots$

Aussage

X, Y zwei Riemannsche Flächen, $f: X \to Y$ holo und nicht-konstant, $x \in X$, $y := f(x) \in Y$. Dann ex. genau ein $n \in \mathbb{N}$, und Karten (U, z) von X mit $\overset{x \in X}{z(x)=0}$, (V, w) von Y mit $y \in Y$, $w(y)=0$, s.d. $w \circ f = z^n$ auf U ist..

$n=2$



„f nimmt in x den Wert y mit Vielfachheit n an."

„f hat in x die Vielfachheit n".

$n \geq 2$: „x ist Verzweigungspunkt von f" $\iff b_f(x) \geq 1$.

$n-1 = b_f(x)$ Verzweigungszahl von f in x.

Beispiel Ist $Y = \mathbb{C}$, so ist $n = b_f(x)+1 = \mathrm{ord}_x(f - \underset{f(x)}{\underset{\shortparallel}{y}}) \geq 1$.

Beweis Wähle holo Karten $(\tilde{U}, \tilde{z})$ von X mit $x \in \tilde{U}$, $\tilde{z}(x) = 0$
(V, w) von Y mit $y \in V$, $w(y) = 0$.

Betrachte Taylorreihe $w \circ f = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \cdot \tilde{z}^k$, $n \geq 1$, $c_k \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$.

$$= c_n \cdot \tilde{z}^n + \ldots$$

$$= \tilde{z}^n \cdot g(\tilde{z}), \quad g(\tilde{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k} \tilde{z}^k$$

holomorph
$g(\tilde{z} = 0) \neq 0$
$= c_n$.

Es ex. eine Umgebung $U \subset \tilde{U}$ und eine holo Fkt. $h : U \to \mathbb{C}$ nullstellenfrei mit $h(\tilde{z})^n = g(\tilde{z})$. Dann gilt

$$w \circ f = \tilde{z}^n \cdot \underbrace{g(\tilde{z})}_{= h(\tilde{z})^n} = \big(\underbrace{\tilde{z} \cdot h(\tilde{z})}_{=: z}\big)^n = z^n.$$

Frage: Ist z Karte lokal in der Nähe von x?

Lokaler Umkehrsatz: g.z.z.: $dz(x) \neq 0$.

(4)

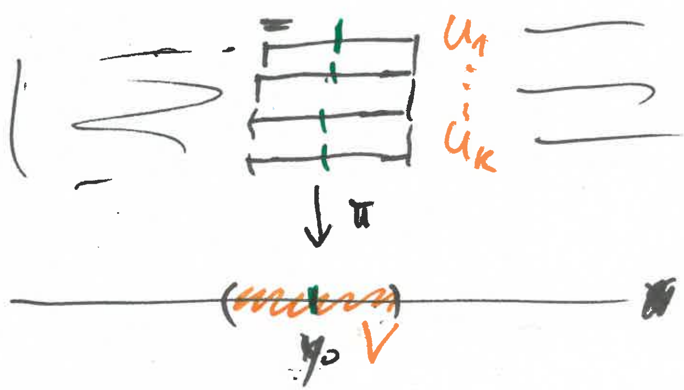
$z = \tilde{z} \cdot h(\tilde{z}) \Rightarrow dz = d\tilde{z} \cdot h(\tilde{z}) + \tilde{z} \cdot h'(\tilde{z})\, d\tilde{z}$ $\qquad x \hat{=} (\tilde{z} = 0)$.

$$dz(x) = \underbrace{d\tilde{z}(x)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{h(0)}_{\neq 0} + 0 \cdot *$$

$\neq 0$.

$\square$.

<u>Überlagerungen</u>: $\pi : X \to Y$



$\pi|_{U_k} : U_k \to V$ biholomorph.

$\pi^{-1}[V] = \bigcup U_k$.

Insb. $\# \pi^{-1}[\{y\}]$ ist von $y \in Y$ unabhängig.

$f : X \to Y$

Aussage X, Y kompakte Rie. Flächen, $f: X \to Y$ holomorph nicht-konstant.

($\Rightarrow$ f surjektiv).

Dann ex. $m \in \mathbb{N}$, so dass jedes $y \in Y$ gezählt gemäß Vielfachheit genau m mal angenommen wird, d.h.

$$\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) = m. \quad \text{für alle } y \in Y.$$

m heißt der <u>Grad</u> von f = „Blätterzahl der (verzweigten) Überlagerung".

$S = \{x \in X \mid \exists x' \in f^{-1}[\{f(x)\}] : b_f(x') \neq 0\} = \{x \in X \mid \# f^{-1}[\{f(x)\}] < m\}$.

endlich.

$f|_{X \setminus S} : X \setminus S \to Y \setminus f[S]$ ist holomorphe, m-blättrige Überlagerung

Beweis

$$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow S_n = \Big\{ y \in Y \;\Big|\; \overbrace{\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x)+1)}^{\text{jedenfalls endlich}} \geq n \Big\}. \quad \text{offen.}$$

Zeige: S_n abgeschlossen.

$\Rightarrow S_n = \emptyset$ oder $S_n = Y$.

$Y = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots$

Also ex. $m \in \mathbb{N}$ mit $S_m = Y$, $S_{m+1} = \emptyset$.

$\Rightarrow \forall y \in Y: \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x)+1) = m. \quad \rightsquigarrow$ Beh.

$=$

Frage: $S_n = Y$ für alle n?

$\left.\begin{array}{l} f^{-1}[\{y\}] \text{ endlich} \\ b_f(x) \text{ endlich} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (b_f(x)+1) < \infty.$

Antwort: nein.

Zeige: S_n abgeschlossen.

Sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in S_n, die gegen ein $y \in Y$ konvergiert.

OE $b_f(x) = 0$ für alle $x \in f^{-1}[\{y_k\}]$, $k \in \mathbb{N}$.

Also ex. $x_{k1}, \dots, x_{kn} \in X$ ~~mit x~~ paarweise verschieden,
mit $f(x_{kj}) = y_k$.

X kompakt $\Rightarrow$ $(x_{kj})_k$ besitzt konvergente Teilfolge.

OE $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert für $j \in \{1, \dots, n\}$ gegen ein $x_j \in X$.

$f(x_j) = f(\lim x_{kj}) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim \underbrace{f(x_{kj})}_{= y_k} = y.$ $\Rightarrow x_j \in f^{-1}[\{y\}]$.

$\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (1 + b_f(x)) \geq n.$ $\Rightarrow y \in S_n$.

$\square$.

Satz von Riemann-Hurwitz

X, Y zwei kompakte Riem. Flächen vom Geschlecht g_X bzw. g_Y

$f: X \to Y$ nicht-konst. holo. Abb. = verzweigte Überlagerung.

m Grad von f = Blätterzahl von f.

$b_f = \sum_{x \in X} b_f(x) < \infty$. totale Verzweigungsordnung.

Formel von Riemann-Hurwitz: $\boxed{g_X = \frac{1}{2} b_f + m(g_Y - 1) + 1.}$

$\Rightarrow b_f$ ist immer gerade.

Beispiel

$f: X \to \hat{\mathbb{C}}$ ($= Y$) sei 2-blättrige, verzweigte Überlagerung. $\Rightarrow m = 2$, $g_Y = 0$.

$g_X = \frac{1}{2} b_f + 2 \cdot (0 - 1) + 1 = \frac{1}{2} b_f - 1 \iff \boxed{b_f = 2 g_X + 2.}$

X heißt hyperelliptisch.

Beweis

Erinnerung: X komp. Riem. Fläche, g Geschlecht $\textcircled{g}$

$K \in \mathrm{Div}(X)$ kanonisch $\Leftrightarrow \exists \underset{\neq 0}{\omega} : K = (\omega)$

$\deg(K) = 2g-2$.

$\omega \neq 0$ mero 1-Form auf Y vom Typ $(1,0)$

$f^*\omega$ — " — auf X — " —

$\Rightarrow \deg((\omega)) = 2g_Y - 2$, $\deg((f^*\omega)) = 2g_X - 2$.

$x \in X$, $y = f(x)$ $\rightsquigarrow$ Es ex. Karten z, w mit $w \circ f = z^k$, $k = b_f(x)+1$.

Schreibe lokal $\omega = \varphi(w)\,dw$. Da gilt $\quad g^*(f(z)dz) = (f\circ g)\,dg^*z$

$$\Rightarrow f^*\omega = \varphi(z^k)\,d(z^k) = \varphi(z^k)\,k\cdot z^{k-1}dz$$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}_x(f^*\omega) = \underset{b_f(x)+1}{\overset{\shortparallel}{k}} \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_y(\varphi)}_{=\mathrm{ord}_y(\omega)} + \underbrace{(k-1)}_{=b_f(x)} = b_f(x) + (b_f(x)+1)\cdot \mathrm{ord}_y(\omega).$$

$$\Rightarrow \sum_{x\in f^{-1}[\{y\}]} \mathrm{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{x\in f^{-1}[\{y\}]} b_f(x) + \underbrace{\sum (b_f(x)+1)}_{=m} \cdot \mathrm{ord}_y(\omega) = \sum b_f(x) + m\cdot \mathrm{ord}_y(\omega)!$$

10

$$2g_X - 2 = \deg((f^*\omega)) = \sum_{x\in X} \operatorname{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{y\in Y} \sum_{x\in f^{-1}[\{y\}]} \operatorname{ord}_x(f^*\omega)$$

$$= b_f + m\cdot \sum_{y\in Y} \operatorname{ord}_y(\omega) = b_f + m\cdot \deg((\omega)) = b_f + m\cdot(2g_Y - 2).$$

$\boxtimes$.

$$\Rightarrow 2g_X - 2 = b_f + m\cdot(2g_Y-2)$$

Df Eine kompakte Riemannsche Fläche X heißt <u>hyperelliptisch</u>, wenn es eine nicht-konstante, meromorphe Fkt. f auf X gibt, die (gemäß Vielfachheit) genau zwei Polstellen besitzt.

$$\Updownarrow$$

$f: X \to \hat{\mathbb{C}}$ ist verzweigte, 2-blättrige Überlagerung.