24. Vorlesung 20.05.2020 ①

X eine kompakte Riem. Fläche vom Geschlecht g

$D \in \mathrm{Div}(X)$

Riemann-Roch: $\underbrace{\dim H^0(X, \overset{\{f \mid (f) \geq -D\}}{\mathcal{O}_D})}_{②} - \underbrace{\dim H^1(X, \mathcal{O}_D)}_{= i(D) \text{ Spezialitätsindex}} = 1 - g + \deg(D).$

Serre-Dualität: $\boxed{H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega_{-D}).}$ $\Rightarrow$ $i(D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$
$= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}).$

Erinnerung: $\Omega_D(U) = \{ \omega$ meromorphe 1-Form auf U vom Typ $(1,0) \mid (\omega) \geq -D \}.$

$\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$, $K = (\omega_0)$, ω_0 mero. 1-Form.
$\uparrow$ kanonischer Divisor.

$\mathcal{O}_{D+K} \to \Omega_D$, $f \mapsto f \cdot \omega_0$.

$H^q(X, \Omega_D) \cong H^q(X, \mathcal{O}_{D+K}).$ (insb. endlich-dimensional).

Riemann-Roch, 2. Variante:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = 1 - g + \deg(D).$$

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 1 - g + \deg(D)$$

X kompakte Rien. Fläche, mit Geschlecht g.

Aussage

Dann ex. $k_0 \in \mathbb{Z}$, s.d. für jeden Divisor gilt: $\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \deg(D) + k_0$.

[$k_0 = g-1$ mittels Serre-Dualität.]

Beweis $H^0(X, \underbrace{\Omega_D}_{\cong \mathcal{O}_{D+K}})$, K kanonischer Divisor.

$$\dim H^0(X, \Omega_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) = \underbrace{i(D+K)}_{\geq 0} + 1 - g + \underbrace{\deg(D+K)}_{= \deg(D) + \deg(K)}$$

$$\geq \deg(D) - k_0, \quad k_0 = \overset{1-g}{\cancel{g-1}} + \underbrace{\deg(K)}_{=2g-2}. \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

mit Serre-Dualität: $\Rightarrow k_0 = g-1$.

(3)

Sei ω mero. 1-Form auf X vom Typ $(1,0)$, $a \in X$.

$\rightsquigarrow \operatorname{Res}_a(\omega) \in \mathbb{C}$

$\omega = f(z)dz$

$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z(a))^k$

$\operatorname{Res}_a(\omega) = c_{-1}$.

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,\varepsilon)} \omega$.

$$\operatorname{Res}(\omega) = \sum_{a \in X} \operatorname{Res}_a(\omega)$$

$$\xi \in H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X) / d\mathcal{E}^{1,0}(X).$$

Repräsentiere ξ durch eine glatte 2-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$.

$\omega = \varphi(z)\, dz \wedge d\bar{z}$

$\uparrow$ Höchstfunktion.

$$\operatorname{Res}(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_X \omega \in \mathbb{C}$$

Residuum von ω.

Zwei Rep von ξ: $\omega, \omega' \Rightarrow \omega - \omega' = d\eta$, $\eta \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$.

$$\int_X d\eta \underset{\text{Stokes}}{=} 0.$$

$$\Rightarrow \int_X \omega = \int_X \omega'.$$

Konstruiere: $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$.
$\omega \longmapsto$

Dazu konstruiere: $\langle\ ,\ \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow \mathbb{C}$.
Bilinearform. $(\omega, \xi) \longmapsto \langle \omega, \xi \rangle$.

Dann wähle $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$, $\omega \mapsto \langle \omega, \cdot \rangle$
lineare Abbildung.

$(\omega, \xi) \mapsto \omega\xi$.
$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \Omega)$
bilineare Abbildung $\downarrow \mathrm{Res}$
$\mathbb{C}$

$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \longrightarrow \Omega$
$(\omega, f) \longmapsto \omega f$
$(\omega) \geq D$, $(f) \geq -D$
$(\omega f) \geq D + (-D) = 0$

$\langle\ ,\ \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to \mathbb{C}$, $(\omega, \xi) \mapsto \mathrm{Res}(\omega\xi)$.

Serre-Dualität

$\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Serre-Dualität, alternative Formulierung

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ in beiden Argumenten nicht-entartet ist; d.h.

(a) $\forall \omega \in H^0(X, \Omega_{-D}) \setminus \{0\} \; \exists \xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D) : \langle \omega, \xi \rangle \neq 0.$

(b) $\forall \xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D) \setminus \{0\} \; \exists \omega \in H^0(X, \Omega_{-D}) : \langle \omega, \xi \rangle \neq 0.$

So etwas heißt eine Paarung zwischen $H^0(X, \Omega_{-D})$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$

Folgerungen aus der Serre-Dualität:

- Umformulierung von R-R: $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = 1 - g + \deg(D)$.

  Spezialfall $D=0$: $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim}}\, H^0(X, \mathcal{O}) - \dim H^0(X, \Omega) = 1-g$

  $\Rightarrow \boxed{\dim H^0(X, \Omega) = g}$

- $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$, $\mathcal{O}_{-D} \cong \Omega_{-(D+K)}$

  Serre-Dualität für $D+K$:

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \Omega_{-(D+K)}) & \cong & H^1(X, \mathcal{O}_{D+K})^* \\ \cong & & \cong \\ H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) & & H^1(X, \Omega_D)^* \end{array}.$$

$$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*.$$

$D=0$: $\dim H^1(X, \Omega) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$.

Res: $H^1(X, \Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist Vektorraum-Isomorphismus.

Klar ist: Je zwei kanonische Divisoren K auf X haben denselben Grad. ⑦

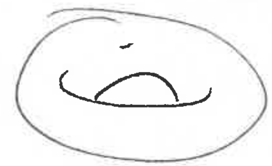
<u>Beh.</u> $\deg(K) = 2g-2$.

Beweis: Riemann-Roch für K:

$$\underbrace{\dim H^0(X, \underset{\cong\,\Omega}{\mathcal{O}_K})}_{=g} - \underbrace{\dim H^1(X, \underset{\cong\,\Omega}{\mathcal{O}_K})}_{=1} = 1 - g + \deg(K)$$

$\Rightarrow \deg(K) = 2g-2$. $\square$

<u>Beh.</u> Komplexe Tori $X = \mathbb{C}/\Gamma$ (Gitter) haben das Geschlecht 1.



Beweis: dz ist holo. 1-Form auf $\mathbb{C}$, ohne Nullstellen.

$\pi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ reguläre Überlagerung. $\rightsquigarrow$ Gibt es ω holo 1-Form auf $\mathbb{C}/\Gamma$ mit $\pi^*\omega = dz$?

Ist γ Decktrafo von π, so gilt $\gamma^* dz = dz$?

$\gamma(z) = z + w$, $w \in \Gamma$.

$\gamma^* dz = d(z+w) = dz$. Ja. Ja.

$K \doteq (\omega) = 0 \Rightarrow \underset{2g-2}{\deg(K)} = 0 \Rightarrow g = 1$ $\square$

D heißt <u>nicht-speziell</u>, wenn $i(D) = 0$, d.h. $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

" " <u>speziell</u>, " $i(D) > 0$.

<u>Beh.</u> $\deg(D) > 2g-2 \Rightarrow D$ ist nicht-speziell.

<u>Beweis</u>

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \underset{\uparrow \text{Serre}}{\cong} H^0(X, \underbrace{\Omega_{-D}}_{= \mathcal{O}_{K-D}}) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0.$$

$\deg(K-D) = \deg(K) - \deg(D)$
$= (2g-2) - \deg(D) < 0$.

□.

<u>Beh.</u> $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$.

$H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = 0$.

[$\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{(1)}$, $f \mapsto f\omega$

für eine feste mero 1-form $\omega \neq 0$

ist Garben-Isomorphismus.]

z.Zg. $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$

$\ni$ ξ. Repräsentiere: off. Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$.

$f_{ij} \in \mathcal{M}(U_i \cap U_j)$.

Nach Vorlesung ex. $D \in \mathrm{Div}(X)$, $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$.

OE $\deg(D) > 2g-2$ $\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$. $\Rightarrow \underset{Z^1/B^1}{H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)} = 0$.

$\Rightarrow (f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) \subset B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$.

$\Rightarrow \xi = 0$. $\square$.

Df $D \in \mathrm{Div}(X)$.

$\mathcal{O}_D$ heißt <u>global erzeugt</u>, wenn es für jedes $x \in X$ ein $\boxed{f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)}$ gibt mit $\underbrace{\mathcal{O}_{D,x} = \mathcal{O}_x \cdot f}$.

$(f) \geq -D$.

$\Leftrightarrow \mathrm{ord}_x(f) = -D(x)$.

<u>insgesamt:</u>
$\mathrm{ord}_x(f) = -D(x)$
$\mathrm{ord}_{x'}(f) \geq -D(x')$.
für $x' \neq x$

<u>Beispiel</u> $X = \hat{\mathbb{C}}$. $g = 0$.

- $D \geq 0$: $\mathcal{O}_D$ ist global erzeugt
  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. $\rightsquigarrow$ $f(z) = (z - z_0)^{-D(z_0)}$ $(z_0 \neq \infty)$
  $f(z) = z^{D(z_0)}$ $(z_0 = \infty)$

  $(\deg(D) \geq 0 = 2g$

- $D = -z_0$: $\mathcal{O}_D$ ist <u>nicht</u> global erzeugt.
  $\deg(D) = -1$ $H^0(X, \mathcal{O}_D) = \cancel{\mathbb{C}} \{0\}$.

<u>Übungsaufgabe</u>: Zeige direkt für $\hat{\mathbb{C}}$: $\deg(D) \geq 0$
$\Rightarrow D$ global erzeugt.

11

Beh. $\deg(D) \geq 2g \Rightarrow D$ global erzeugt.

Bew: $x_0 \in X$, $D' = D - x_0$. Idee: Zeige $\underbrace{H^0(X, \mathcal{O}_D) \setminus H^0(X, \mathcal{O}_{D'})}_{\ni f} \neq \emptyset$.

Klar: $D' \leq D \Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \subset H^0(X, \mathcal{O}_D)$.

$\deg(D) = \deg(D') + 1 > \deg(D') \geq 2g-1 > 2g-2$.

$\Rightarrow D, D'$ nicht-speziell.

Riemann-Roch: $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \cancel{1-g+} \underbrace{\deg(D-D')}_{=1}$

$\square$

Beweis der Serre-Dualität: Forster, §17.

- verzweigte Überlagerungen $\quad f: X \xrightarrow{b} Y$, g, g'
- Riemann-Hurwitz
- hyperelliptische Fläche