

Frage: Suche meromorphe Funktionen f , die Pole nur an bestimmten Stellen, und mit vorgegebener max. Ordnung haben können.

und Nullstellen einer vorgegebenen Ordnung an vorgegebenen Stellen haben müssen.

→ Satz von Riemann-Roch

oder $\varphi \geq -D(a)$
 $(\varphi) \geq -D.$
 für vorgegebenes $D: X \rightarrow \mathbb{Z}$
 mit $\{a \in X \mid D(a) \neq 0\}$ diskret.

Definition X Riem. Fläche

(a) Ein Divisor auf X ist eine $D: X \rightarrow \mathbb{Z}$, s.d. $\{x \in X \mid D(x) \neq 0\} =: \text{supp}(D)$ diskret ist. → $\text{Div}(X)$. Raum der Divisoren auf X , abelsche Gruppe.

$D, D' \in \text{Div}(X): D \leq D' : \Leftrightarrow D(x) \leq D'(x)$ für alle $x \in X$.

(e) $f \in \mathcal{H}(X) \mapsto (f): X \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, x \mapsto \text{ord}_x(f) := \begin{cases} k & \text{wenn } f \text{ in } x \\ & \text{Nst. } k\text{-tes Ableitungs} \textcircled{2} \\ 0 & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ keine} \\ & \text{Nullstelle ist} \\ -k & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ eine} \\ & \text{Polstelle } k\text{-tes Grades ist} \end{cases}$

$f \neq 0 \Rightarrow (f) \in \text{Div}(X)$.

$D \in \text{Div}(X) \mapsto \mathcal{H}_D$ ist ein Vektorraum von D , wenn

$$(f) \geq D.$$

f holomorph $\Leftrightarrow (f) \geq 0$.

(c) $D \in \text{Div}(X)$ heißt Hauptdivisor, wenn es ein $f \in \mathcal{H}(X) \setminus \{0\}$ mit $(f) = D$ gibt.

$D, D' \in \text{Div}(X)$ heißen äquivalent, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.

(d) $w \in \mathcal{H}^{(1,0)}(X)$. $x \in X$: Wähle Karte z um x und schreibe $w = f(z) dz$.
 $\text{ord}_x(w) := \text{ord}_x(f)$.
 Für $w \neq 0$ ist $(w) \in \text{Div}(X)$.

(a) $X \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, x \mapsto \text{ord}_x(w)$.

(e) $D \in \text{Div}(X)$ heißt kanonischer Divisor, wenn es eine $w \in \mathcal{H}^{(1,0)}(X) \setminus \{0\}$ mit $(w) = D$ gibt.

$$\bullet (f \cdot g) = (f) + (g), \quad (1/f) = -(f), \quad (f \cdot u) = (f) + (u). \quad (3)$$

Identifizieren Punkte $x \in X$ mit Divisoren $x: X \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = x \\ 0 & \text{für } x \neq x. \end{cases}$

$$D = k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad k_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X.$$

Beispiel $X = \mathbb{C}$. $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2}$. $(f) = \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{Z}}}{1} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ \in X}}{1}) + \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{Z}}}{1} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ \in X}}{-1}) - 2 \cdot (0) \in \text{Div}(X).$

Falls X kompakt: $D \in \text{Div}(X) \Rightarrow \text{supp}(D)$ endlich
 $\deg(D) := \sum_{x \in X} D(x)$

$\deg: \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, $D \mapsto \deg(D)$ ist Hom. von abelschen Gruppe.

Für jeden Hauptdivisor D auf X gilt $\deg(D) = 0$.

X irreduzible Fläche, $D \in \text{Div}(X)$.

(4)

$U \subset X$ offene Teilmenge $\rightarrow \mathcal{O}_D(U) := \{ f \in \mathcal{H}(U) \mid (f) \geq -D \}$ ≥ 0
 $\mathcal{L}$ ist Vektorraum, kommutativer Ring mit Eins.

$\mathcal{O}_D := (\mathcal{O}_D(U))_{U \subset X \text{ off.}}$ Garbe von $\mathcal{O}_D$ -Modulen, von $\mathcal{L}$ über X .

$\mathcal{O}_D \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_D \Leftrightarrow D \geq 0$.

$D, D' \in \text{Div}(X)$ äquivalente Divisoren $\Rightarrow \mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{D'}$

$f \in \mathcal{H}(X)$ und $(f) = D - D'$.

$\mathcal{O}_D(U) \rightarrow \mathcal{O}_{D'}(U)$, $f \mapsto f \cdot g$
gilt Isomorphismen.

Nur in gewissen Fällen für $\mathcal{O}_D(X) = \mathcal{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$. X kompakt.

$\deg(D) < 0 \Rightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

$D = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = \mathcal{H}^0(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$.

$\deg(D) > 0 \Rightarrow \dim \mathcal{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = ?$

$$D \in \text{Div}(X) \rightsquigarrow \Omega_D(u) = \sum w \in \mathcal{H}^{(1,0)}(u) \mid (w) \geq -D. \quad (5)$$

$$\rightsquigarrow \Omega_D$$

$$w \in \Omega^{(1,0)}(X).$$

$$K = (w), \quad D \in \text{Div}(X) \rightsquigarrow$$

$$D_{D+K}(u) \rightarrow \Omega_D(u), f \mapsto f \cdot w.$$

$$\text{Iso. von Geraden } \mathcal{O}_{D+K} \cong \Omega_D.$$

Theorem (Satz von Riemann-Roch)

X kompakte Riem. Fläche.

Gradleast $g < \infty$. $g = \dim H^1(X, \mathcal{O})$.

$$D \in \text{Div}(X).$$

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D), \quad \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) < \infty.$$

$$\boxed{\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D).}$$

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \deg(D) = 1 - g.$$

$$=: i(D)$$

$$H^0(X, \Omega_{-D})$$

$\uparrow$ Serre-Dualität

$$i(D) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

heißt Spezialisationsindex.

D heißt speziell,

wenn $i(D) > 0$.

folgend, "untergeordnet" : $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \dim \text{deg}(D)$. (6)

—
 when $D \geq 0$: $\partial \subset \partial D$, $\mathbb{Q} \subset H^0(X, \mathcal{O}_D)$. $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1$.

Es gilt selbst-homomorphe Filtr. in $H^0(K, \mathcal{O}_Y)$ genau dann, wenn $\dim H^0(K, \mathcal{O}_Y) \geq 2$.

Dielement, geordnet z. $x \in X$.

Korollar X lila. Stelle, Körperpunkt σ $\mathcal{O}_\sigma$
Dann $\sigma. \varphi \in \mathcal{H}(X)$, nicht-konstant, die in X einen Pol höchstens
der Ordnung $g+1$ hat und ausserdem Polynom ist.
 $f: X \rightarrow \mathbb{A}^1$

Dann $\exists f \in \mathcal{H}(X)$, nicht-konstant, die φ approximiert.

der Ordnung $g+1$

Basics

$\mathcal{D} = (g+1) \cdot x \in \text{Div}(X).$

$$\text{deg } H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g + \underbrace{\deg(\mathcal{O}_X)}_{=g-1} + \underbrace{i(\mathcal{O}_X)}_{\geq 0} \geq 2.$$

Wähle $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D) \setminus \mathbb{C}$.

$f: X \rightarrow \mathbb{A}^1$ lokal
verschiebe über-
lagerung des
Balkenbild löscher
 $g+1$ ins.

7

Korollar X kompakte riemannsche Fläche von genus g .

(7)

$g=0 \Leftrightarrow X$ ist biholomorph zu $\mathbb{P}^1 \Leftrightarrow X$ ist einfach zusammenhängend.
 Riem. Abb. satz.

—

Bsp

Beweis des Satzes von Riem-Roch:

$$\chi(D) = 0. \quad \text{z.z.} : \dim \underbrace{H^0(X, \mathcal{O})}_{= \mathbb{C}} - \underbrace{\dim H^1(X, \mathcal{O})}_{= g} = 1 - g. \quad \checkmark$$

$$D \geq D', \quad \mathcal{O}_D \subset \mathcal{O}_{D'}$$

Sei $D \in \text{Div}(X)$, $p \in X$. $D' := D + p$. ($\Leftrightarrow D = D' - p$).

Beh. R-R gilt für $D \Leftrightarrow$ R-R gilt für D' .

Wird jeder Divisor auf X als $p_1 + p_2 + \dots + p_n - q_1 - q_2 - \dots - q_m$ geschrieben werden kann, folgt aus diesem Beh. R-R für den allgemeinen Fall. (da jeder Divisor auf X).

Dann

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D'} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_P \rightarrow 0.$$

↓ Molekularer-Sgabe

ist exakte Sequenz von Garben.

$$\mathbb{C}_P(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls } p \in U \\ \{0\} & \text{falls } p \notin U. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{nd } \mathbb{C}_P \text{ garbe, } H^0(X, \mathbb{C}_P) &= \mathbb{C} \\ H^1(X, \mathbb{C}_P) &= 0. \end{aligned}$$

$$U \in \mathcal{X} \text{ offen } \text{nd } \beta_U : \mathcal{O}_{D'}(U) \rightarrow \mathbb{C}_P(U)$$

$$1. \text{ Fall: } p \notin U \text{ nd } \beta_U \equiv 0. \text{ Wähle Karte } z \text{ mit } z(p) = 0.$$

$$2. \text{ Fall: } p \in U \text{ nd } f \in \mathcal{O}_{D'}(U), \text{ Laurentreihe von } f: f(z) = \sum_{k=-(n+1)}^{\infty} c_k z^k$$

$$u = D(f), \text{ nd } D'(p) = u+1.$$

$$\beta_U(f) := c_{-(u+1)}.$$

50

11

Q Q

$$V \oplus V = V$$

^a Qui valent per Exaltationem

$$0 \rightarrow K^0(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow K^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta_0} V \rightarrow 0$$

$$V = 0 \quad V = \infty$$

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \rightarrow 0 \quad \text{exact.}$$

$$\dim V = \underbrace{\dim \ker \varphi}_{= \dim U} + \underbrace{\dim \operatorname{im} \varphi}_W$$

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

(10)

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V$$

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim W + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}).$$

+

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$$

$$+ \underbrace{\dim V + \dim W}_{=1}$$

$$= \deg(D') - \deg(D).$$

$$\Rightarrow \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) = \deg(D')$$

$$= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \deg(D).$$

$\Rightarrow \text{R-R gilt für } D \Leftrightarrow \text{R-R gilt für } D'.$

□