

X kompakte Riem. Fläche $\Rightarrow g = \dim H^1(X, \mathbb{C}) < \infty$

X top. Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, Garben, exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 φ injektiv $\text{im}(\varphi) = \ker(\psi)$ φ garbensurjektiv

φ, ψ Garbenhom.

"semitriviales Produkt"
 $\mathcal{G} = \mathcal{F} \times_{(\varphi, \psi)} \mathcal{H}$

und "kurze" locally Sequenz von Kohomologegruppen:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^1} H^1(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^2} H^2(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^2} H^2(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 $\mathcal{F}(X)$ $\mathcal{G}(X)$ $\mathcal{H}(X)$ $\mathcal{F}(X)$ $\mathcal{G}(X)$ $\mathcal{H}(X)$ $\mathcal{F}(X)$ $\mathcal{G}(X)$

$$\downarrow$$

$(H^2(X, \mathcal{F}))$

$\vdots$

$\varphi: F \rightarrow G$ Garbenhomomorphismus.

$$F = (F_U)_{U \subset X} \text{ offen} \quad (2)$$

$$\varphi = (\varphi_U: F_U \rightarrow G_U)_{U \subset X \text{ offen}}$$

$$\#^0(X, F) = F(X).$$

$$\varphi^0 = \varphi_X: \#^0(X, F) \rightarrow \#^0(X, G).$$

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ off. Überdeckung von X . $\mathcal{U} \subset C^1(\mathcal{U}, F) \ni (f_{ij})_{i,j \in I}$
 $\mathcal{F}(U_i \cap U_j): \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$

$$\varphi_{\mathcal{U}}: C^1(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, G), (f_{ij}) \mapsto (\varphi_{U_i \cap U_j}(f_{ij}))_{i,j \in I}.$$

$$\varphi_{\mathcal{U}}(Z^1(\mathcal{U}, F)_{B^1}) \subset Z^1(\mathcal{U}, G) \quad \#^1 = Z^1/B^1$$

$$\varphi_{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{U}}} H^1(\mathcal{U}, G) \quad \varphi^1: H^1(X, F) \rightarrow H^1(X, G).$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \partial_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} & \varphi_1 & \downarrow \partial_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} \\ H^1(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{U}}} & H^1(\mathcal{U}, G) \end{array}$$

(3)

Aufgabe $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ surjektives Garben-Homom.

$$\text{und } \delta^{\mathcal{G}}: \mathcal{H}^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\text{im}(\varphi)} \mathcal{H}^1(X, \text{ker}(\varphi)).$$

verbindender Homomorphismen.

$$\underbrace{\quad}_{= \mathcal{H}(X)}.$$

$$L \in \mathcal{H}(X).$$

Dann ex. $\mathcal{U} \simeq (\mathcal{U}_p)_{p \in X}$ und $p \in \mathcal{U}_p$ offene Überdeckungund $g_p \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_p)$ mit $\varphi(g_p) = L|_{\mathcal{U}_p}$. $(g_p) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.und $\delta^0(g_p) \in \mathbb{Z}^1(X, \text{ker}(\varphi))$, definiert ein Zlt von $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, \text{ker}(\varphi))$.und damit φ von $\mathcal{H}^1(X, \text{ker}(\varphi))$ ein Zlt $\delta^{\mathcal{G}}(L)$.

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

exakt

$$\delta^{\mathcal{G}}: \mathcal{H}^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}^1(X, \text{ker}(\varphi)).$$

 $\stackrel{= \text{im}(\varphi)}{\quad}$

$$L \in \mathcal{H}^0(X, \mathcal{H}) \Rightarrow \delta^{\mathcal{G}}(L) \in \mathcal{H}^1(X, \text{im}(\varphi)).$$

Dann ex. $\delta^{\mathcal{H}}(L) \in \mathcal{H}^1(X, \mathcal{F})$

$$\text{mit } \varphi^1(\delta^{\mathcal{H}}(L)) = \delta^{\mathcal{G}}(L). \quad \text{und } \delta^{\mathcal{H}}: \mathcal{H}^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}^1(X, \mathcal{F}). \quad \text{Gruppenhomomorph.}$$

Verbindender Homomorphismen (der exakten Sequenz)

Theorem X top Raum, $F, G, \mathcal{H}$ geben auf X , $\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow \mathcal{H}$ geben weiter. (4)

Wenn die Sequenz

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

exakt ist, dann ist auch die folgende Sequenz exakt:

$$0 \rightarrow H^0(X, F) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, G) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, F) \xrightarrow{\varphi^1} H^1(X, G) \xrightarrow{\psi^1} H^1(X, \mathcal{H})$$

Beweis

Wir wissen, dass exakt ist: $0 \rightarrow F(X) \rightarrow G(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0$.

$$\delta^0: H^0(X, F) \rightarrow H^1(X, \ker \varphi)$$

Der Exaktkeits bei $H^0(X, \mathcal{H})$: z.B. $\text{im}(\psi^0) = \ker(\delta^*)$.

"c" $g \in H^0(X, G)$, $h := \psi^0(g)$. $\Rightarrow \delta^4(h) = 0 \in H^1(X, \ker \psi)$. $\Rightarrow \delta^*(h) = 0$.

"d" $h \in \ker(\delta^*)$. $\delta^*(h) = 0 \in H^1(X, F)$. $\Rightarrow \delta^4(h) = 0 \in H^1(X, G)$. D.h. es ex.

eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ und $(g_i)_{i \in I} \in \mathcal{C}^0(X, G)$ s.d.

$\delta^4(h)$ durch $\delta^0((g_i)) \in H^0(\mathcal{U}, \ker(\psi))$. Da wird $\delta^*(h)$ repräsentiert $B^1(\mathcal{U}, G)$

⑤

$$\text{and } (h_j) \in \mathcal{H}^1(\mathcal{M}, F) \text{ and } \varphi'((h_j)) = \delta^0((g_i)).$$

$$\delta^*(h_i) = 0 \Rightarrow (h_j) \in \mathcal{B}^*(\mathcal{M}, F) \Rightarrow \exists \text{ ex. } (h_i) \in C^0(\mathcal{M}, F) \text{ and } (h_j) = \delta^0((h_i)).$$

$$\tilde{g}_i := g_i - \varphi(h_i).$$

$$\tilde{g}_i - \tilde{g}_j = (g_i - \varphi(h_i)) - (g_j - \varphi(h_j)) = (g_i - g_j) - \underbrace{\varphi(h_j)}_{=g_i - g_j} = 0.$$

$$\stackrel{(L_1)}{\Rightarrow} \exists \text{ ex. } g \in H^0(X, \mathcal{G}) \text{ with } g|_{U_i} = \tilde{g}_i. \text{ Due to } g \in \mathcal{L} :$$

$$\begin{aligned} \chi(g_i) &= \chi(g_i - \varphi(h_i)) = \chi(g_i) - \underbrace{\chi(\varphi(h_i))}_= 0 \text{ wg. } \text{inv}(e)\text{char}(\varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_i \in \text{inv}(\varphi).$$

⑥

Zur Exaktheit bei $H^1(X, \mathcal{F})$: z.B.: $\text{im}(\delta^0) = \ker(\varphi^1)$.

"C" ✓

"D" $\xi \in \ker(\varphi^1) \subset H^1(X, \mathcal{F})$. Repäsentant $(h_i^j) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

$\varphi^1(\xi) = 0 \in H^1(X, \mathcal{G})$. Also ex. $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ mit $(\varphi(h_i^j)) = \delta^0((g_i))$.

Dann $\varphi(g_i) - \varphi(g_j) = \varphi(g_i - g_j) = \varphi(\varphi(h_i^j)) = 0$
 $\uparrow$
 $\text{im}(\varphi) = \ker(\varphi)$.

(LG) Es ex. $\lambda \in H^0(X, \mathcal{H})$ mit $\lambda|_{U_i} = \varphi(g_i)$.

$\Rightarrow \delta^*(\lambda) = \xi$, d.h. $\xi \in \text{im}(\delta^*)$.

Zur Exaktheit bei $H^2(X, \mathcal{G})$: z.B.: $\text{im}(\varphi^1) = \ker(\varphi^2)$.

[...]

□

Sei $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Da:

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\gamma^0} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \text{ exakt.}$$

D.h. $\delta^*: H(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ surjektiv und $\ker(\delta^*) = \gamma^0[\mathcal{G}(X)]$.

Folgerung: In $H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\gamma^0} H(X) \rightarrow 0$ exakt und $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$,
 so ist $H^1(X, \mathcal{F})$ isomorph zu $H(X)/\gamma^0[\mathcal{G}(X)]$.

Lemma von Dolbeault: $B \subset \mathbb{C}$ offene Kreisscheibe.

$$\begin{aligned} \Rightarrow d''[\mathcal{E}(B)] &= \mathcal{E}^{(0,1)}(B). \\ \Rightarrow \mathcal{E}^{(0,1)}(B) / d''[\mathcal{E}(B)] &= 0. \end{aligned}$$

$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} = f \xleftarrow{\text{gerad.}} \gamma \bar{g} \bar{d} \bar{z} \in \mathcal{E}(X)$
 $\Leftrightarrow f(z) dz \bar{z}$
 $\uparrow$ 1-Form vom Typ $(0,1)$
 $d''g = \omega \uparrow \in \mathcal{E}^{(0,1)}$

X Riemannsche Fläche.

$$\text{Sequenz von Soben: } 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

↑
Exakt! : Lemma von Dolbeault.

$$\text{Deshalb: } H^1(X, \mathcal{O}) \cong \underbrace{\mathcal{E}^{(0,1)}(X) / d''[\mathcal{E}(X)]}_{H^1(X, \mathcal{E}) = 0} \leftarrow \begin{matrix} \text{Theorem von} \\ \text{Dolbeault.} \end{matrix}$$

lin. unabh.

dim $H^1(X, \mathcal{O}) = g = \text{graduell}$ ist die Anzahl der Bedingung,
die an $w \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ gestellt werden müssen, damit
 $d''g = w$ eine Lösung $g \in \mathcal{E}(X)$ besitzt.

Analog: $w \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ (habe 2-Formen) gegeben. Suche $w \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ und
also γ .
 $\mathcal{E}^{(2)}(X) / d[\mathcal{E}^{(1,0)}(X)] \cong H^1(X, \Omega)$ (habe 1-Formen).

$$\text{denn } 0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \rightarrow 0 \text{ exakt.}$$

$$w \in \mathcal{E}^{(1)}(X).$$

(9)

geschlossen, wenn $dw = 0$.

exakt, wenn es $f \in \mathcal{E}(X)$ mit $df = w$. gilt.

geschlossen
 $\uparrow \uparrow$ ~~ist~~ $i: A \rightarrow B$
exakt

$$\frac{\{\text{geschlossene 1-Formen auf } X\}}{\{\text{exakte 1-Formen auf } X\}} = \frac{\text{Kern}}{\text{Bild}} = \text{Rd}^1(X)$$

de Rham-Kohomologie

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X) \rightarrow \dots$$

$$d \circ d = 0.$$

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \text{ker}(d) \rightarrow 0.$$

$$\text{Rd}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C})$$

weil
exakt ist.

$$H^1(X, \mathbb{C}) = 0.$$

$\square$