21. Vorlesung

07.05.2020

(1)

Beweis Lemma

2. Schritt: $H := \overset{\zeta}{Z^1_{L^2}(\mathcal{V}, \vartheta)} \times \overset{\xi}{Z^1_{L^2}(\tilde{\mathcal{V}}, \vartheta)} \times \overset{\eta}{C^0_{L^2}(\tilde{\mathcal{W}}, \vartheta)}$ Hilbertraum

Norm: $\|(\zeta, \xi, \eta)\|^2_H = \|\zeta\|^2_{L^2(\mathcal{V})} + \|\xi\|^2_{L^2(\tilde{\mathcal{V}})} + \|\eta\|^2_{L^2(\tilde{\mathcal{W}})}$

$L := \{(\zeta, \xi, \eta) \in H \mid \zeta = \xi + \delta^0(\eta) \text{ auf } Z^1_{L^2}(\tilde{\mathcal{W}}, \vartheta)\}$. abg. Unterraum Hilbertraum.

$\pi : L \longrightarrow Z^1_{L^2}(\tilde{\mathcal{V}}, \vartheta)$, $(\zeta, \xi, \eta) \mapsto \xi$. linear, stetig. surjektiv.

Satz v.d. offenen Abbildung: π offen.

Es ex $C > 0$, s.d. für alle $x = (\zeta, \xi, \eta) \in L$: $\|x\|_H \leq C \cdot \|\underbrace{\pi(x)}_{=\xi}\|_{L^2(\tilde{\mathcal{V}})}$

$\|\zeta\|_{L^2(\mathcal{V})}, \|\xi\|_{L^2(\tilde{\mathcal{V}})}, \|\eta\|_{L^2(\tilde{\mathcal{W}})}$

$\square$

<u>Lemma 2</u> Situation wie zuvor. Dann ex. ein endl. dim. Vektorraum $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, s.d. für jedes $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ gilt: ~~Da~~ Es ex. Elemente $\sigma \in S$, $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ s.d. gilt:

$$\sigma = \xi + \delta^0(\eta) \quad \text{in } Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

$$\sigma = \xi \quad \text{in } H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

$\mathfrak{U} = (U_i)_{1 \le i \le n}$

$\mathfrak{W} = (W_i)_{1 \le i \le n}$

$\mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$, d.h. $W_i \subset\subset U_i$

<u>Folgerung</u> Das Bild des Einschränkungshomomorphismus

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

ist endlich-dimensional.

$\Downarrow$

X Riem. Fl., $Y \subset\subset X$ rel. kompakt, offen
$\leadsto$ $H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(Y, \mathcal{O})$ hat endl. dim Bild.

$\Downarrow$

X kompakt, $Y = X$: $H^1(X, \mathcal{O})$ ist endl. dim.

③

<u>Beweis</u>

Sei $C > 0$ wie im Lemma 1, $\varepsilon := \frac{1}{2C} > 0$. $\mathcal{W} \subset\subset \mathcal{U}$

Es. ex. ein Unter-VR $A \subset Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ ← endliche Kodimension., s.d. gilt:

$$\|\xi\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \varepsilon \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})} \quad \text{für alle } \xi \in A.$$

S sei das Orthokomplement von A im ~~H~~ Hilbertraum $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

$\dim S < \infty$, $A + S = Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, $A \cap S = \{0\}$

$\xi \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ vorgegeben. $\mathcal{V} \subset\subset \mathcal{U} \Rightarrow M := \|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})} < \infty$, $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathcal{V}, \mathcal{O})$.

Nach Lemma 1: Es $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, $\eta_0 \in C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ mit

$$\zeta_0 = \xi + \delta^0(\eta_0) \text{ in } Z^1_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O}) \text{ und } \|\zeta_0\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\eta_0\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq C \cdot M.$$

Es ex. eindeutige $\xi_0 \in A$ und $\sigma_0 \in S$ mit $\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0$.

$$\Rightarrow \underbrace{\xi_0}_{\in A} + \underbrace{\sigma_0}_{\in S} = \xi + \delta^0(\eta_0)$$

Konstruiere iterativ $\zeta_\nu \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, $\eta_\nu \in C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$, $\xi_\nu \in A$, $\sigma_\nu \in S$ mit:

(1) $\zeta_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta^0(\eta_\nu)$, (2) $\zeta_\nu = \xi_\nu + \sigma_\nu$ (3) $\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\eta_\nu\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \|\xi_\nu\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-\nu} \cdot CM$.

Sei die Konstruktion für ein ν schon gemacht.

Konstruktion für $\nu+1$:

Lemma $\underline{1}$: $\zeta_{\nu+1} = \underline{\xi_\nu} + \delta^0(\eta_{\nu+1})$

$$\|\zeta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathcal{U})},\ \|\eta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathcal{W})} \le C\cdot \|\overset{\in A}{\xi_\nu}\|_{L^2(\mathcal{W})} \le \underbrace{C\cdot\varepsilon}_{=\frac{1}{2}}\cdot\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathcal{U})}$$

$$\le \frac{1}{2}\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathcal{U})} \le \frac{1}{2}\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathcal{U})} \le \frac{1}{2}\cdot 2^{-\nu}CM = 2^{-(\nu+1)}CM.$$

Nun zerlege $\zeta_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$ mit $\xi_{\nu+1}\in A$, $\sigma_{\nu+1}\in S$.

Konstruktion fertig.

Aus (2) und (1) folgt: $\xi_\nu + \sigma_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta^0(\eta_\nu)$.

Daher für $k\in\mathbb{N}$: $\xi_k + \sum_{\nu=0}^{k}\sigma_\nu = \xi_{k-1} + \delta^0(\eta_k) + \sum_{\nu=0}^{k-1}\sigma_\nu = \xi_{k-2} + \delta^0(\eta_k+\eta_{k-1}) + \sum_{\nu=0}^{k-2}\sigma_\nu$

$$= \dots = \xi + \delta^0\Big(\sum_{\nu=0}^{k}\eta_\nu\Big)$$

$k \to \infty$?

$$\underbrace{\xi_k}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{\nu=0}^{k} \sigma_\nu}_{\to \sigma} = \xi + \underbrace{\delta^0\Big(\sum_{\nu=0}^{k} \eta_\nu\Big)}_{\to \delta^0(\eta)} \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\Uparrow \\ S}}{\sigma} = \xi + \delta^0(\eta).$$

$$\|\xi_k\| \le \underbrace{2^{-k}}_{\to 0} \cdot CM \quad \Rightarrow \quad \xi_k \to 0.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k =: \underset{\substack{\Uparrow \\ S}}{\sigma}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_\nu =: \underset{\substack{\Uparrow \\ C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})}}{\eta}$ konvergieren absolut im jeweiligen Banachraum. $\square$.

Satz Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset\subset X$ relativ-kompakte, offene, Teilmenge.

Dann ist das Bild des Einschränkungshomomorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$$

endlich-dimensional.

Leray-Überdeckung

$\mathfrak{U} = (U_i)$: $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$

$\Uparrow$

U_i 1-zshgd

Dann $H^1(\underbrace{|\mathfrak{U}|}_{:= \bigcup U_i}, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$!

<u>Beweis</u> $\mathfrak{U}_i^* = (U_i, z_i)$, $\underset{(W_i)}{\mathfrak{W}} \ll \underset{(V_i)}{\mathfrak{V}} \ll \underset{(U_i)}{\mathfrak{U}} \ll \underset{(U_i^*)}{\mathfrak{U}^*}$, $Y \subset |\mathfrak{W}|$

$i = 1, \dots, n$

$z_i[U_i^*]$, $z_i[U_i]$, $z_i[W_i] \subset \mathbb{C}$ seien alles offene Kreisscheiben in $\mathbb{C}$.

U_i, W_i: 1-zshgd $\Rightarrow H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$, $H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$.

$\mathfrak{U}$ ist Leray-Überdeckung von $|\mathfrak{U}|$, $\mathfrak{W}$ ist Leray-Überdeckung von $|\mathfrak{W}|$.

$\overset{\text{Leray}}{\Rightarrow}$ $H^1(|\mathfrak{U}|, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, $\quad H^1(|\mathfrak{W}|, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$.

$H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$. ?

$\hat{=}$

$H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(|\mathfrak{U}|, \mathcal{O}) = \underbrace{H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})}_{\substack{\text{hat endl. dim. Bild} \\ \text{nach Folgerung aus Lemma 2.}}} = H^1(|\mathfrak{W}|, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$

$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$ hat endl. dim. Bild. $\square$

<u>Theorem</u> Kompakte Riemannsche Flächen X haben endliches Geschlecht, d.h. $g := \dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.

<u>Beweis</u> Weil X kompakt ist, kann im letzten Satz $Y = X$ gewählt werden. Dann folgt, dass $\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$. $\square$.

—

Folgerungen über die Existenz meromorpher Funktionen.

<u>Satz</u> X Riemannsche Fläche, $Y \subset\subset X$ relativ-kompakte Teilmenge. ((X kompakt: $Y = X$ möglich))
$a \in Y$. Dann existiert eine ~~...~~ $f \in \mathcal{M}(Y)$, das in a einen Pol besitzt und auf $Y \setminus \{a\}$ holomorph ist.

[In $\mathbb{C}$: $f(z) = (z-a)^{-k}$.]

Beweis

$k := \dim \operatorname{im}\left(H^1(X,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y,\mathcal{O})\right) < \infty$

z^{-j}

Wähle Karte (U_1, z) mit $a \in U_1$, $z(a) = 0$.

$U_2 := X \setminus \{a\}$. $\leadsto$ $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$. offene Überdeckung von X.

$\xi_j \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ $\quad$ ξ_j wird durch $f_{j,12} \in \mathcal{O}(\underbrace{U_1 \cap U_2}_{= U_1 \setminus \{a\}})$ eindeutig bestimmt.

$\shortparallel$

$(f_{j,kl})_{k,l=1,2}$ $\quad$ $f_{j,12} = z^{-j}$. $\quad$ $\underline{j = 1, \dots, k+1.}$

$\xi_j \in Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$. $\quad$ $(\xi_j)_{j=1,\dots,k+1}$ sind in $H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$ lin. abh.,

also ex. $c_1, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$ (nicht alle Null), $\eta = (\underset{\in \mathcal{O}(U_1 \cap Y)}{f_1}, \underset{\in \mathcal{O}(\underbrace{U_2 \cap Y}_{= Y \setminus \{a\}})}{f_2}) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$

mit $\sum_{j=1}^{k+1} c_j \xi_j = \delta^0(\eta)$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1$ auf $U_1 \cap U_2 \cap Y$

$\Rightarrow \underbrace{f_1 + \sum c_j z^{-j}}_{\in \mathcal{O}(U_1 \cap Y)} = \underbrace{f_2}_{\in \mathcal{O}(U_2 \cap Y)}$ auf $\setminus\{a\}$

Also ex. $f \in \mathcal{O}(Y \setminus \{a\})$ mit
$f|_{U_1 \setminus \{a\}} = f_1 + \sum c_j z^{-j}$
$f|_{Y \setminus \{a\}} = f_2$.
f erfüllt die Bed.

$\square$

Korollar

X kompakte Riem. Fläche. $a_1, \dots, a_n \in X$ paarw. verschieden.
$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$

Dann ex. $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f(a_i) = c_i$ für $i = 1, \dots, n$.

((f muss mindestens einen Pol haben.))

Beweis Nach Satz ex. $f_i \in \mathcal{M}(X)$, die in a_i einen Pol besitzt und ansonsten holomorph ist.

Für $j \neq i$ betrachte $g_{ij} = \dfrac{f_i - f_i(a_j)}{f_i - f_i(a_j) + \lambda_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{ f_i(a_j) - f_i(a_k) \mid j, k \neq i \}$.

$g_{ij}(a_i) = 1$, $g_{ij}(a_j) = 0$, g_{ij} ~~ist~~ in allen a_k holomorph.

$h_i = \prod_{j \neq i} g_{ij} \rightsquigarrow h_i(a_j) = \delta_{ij}$.

$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot h_i$

$\square$.