

$D \subset \mathbb{C}$ offene Teilmenge

$$f \in \mathcal{O}(D) \leadsto \|f\|_{L^2(D)} := \left(\int_D |f(z)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

$$L^2(D, \theta) := \{ f \in \mathcal{O}(D) \mid \|f\|_{L^2(D)} < \infty \} \quad \text{Hilbertraum.}$$

$D' \subset \subset D$ relativ-kompakt, off.

Aussage

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ex. ein Unterhilbertraum

$A \subset L^2(D, \theta)$ mit endlicher Kodimension

(insb. abgeschlossen), s.d. gilt

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D)} \quad \text{für alle } f \in A.$$



$$\|f\|_{L^2(D)} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D')}$$

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D)}$$

Beweis

Es ex. $r > 0$ und $a_1, \dots, a_k \in D'$, s.d. gilt:

$(k \in \mathbb{N})$

$$D' \subset \bigcup_{j=1}^k B(a_j, \frac{r}{2}), \quad B(a_j, r) \subset D \quad \text{für alle } j.$$

$n \in \mathbb{N}$ so, dass $k \cdot 2^{-(k+1)} \leq \varepsilon$. (2)

$A = \{ f \in L^2(\mathcal{D}, \sigma) \mid f \text{ hat in allen } a_j \text{ mindestens eine Nullstelle} \}$.
 der Ordnung n .

$\uparrow$ ist Untervektorraum von $L^2(\mathcal{D}, \sigma)$ mit Kodimension $\leq k \cdot n < \infty$.

A abg. in $L^2(\mathcal{D}, \sigma)$.

$f \in A$. $f(z) = \sum_{v=n}^{\infty} c_v \cdot (z - a_j)^v$ Taylorentwicklung von f um a_j .

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r))}^2 = \sum_{v=n}^{\infty} \frac{\pi}{v+1} r^{2v+2} |c_v|^2$$

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))}^2 = \sum_{v=n}^{\infty} \frac{\pi}{v+1} \left(\frac{r}{2}\right)^{2v+2} |c_v|^2 = \underbrace{2^{-(2v+2)}}_{= 2^{-(2v+2)} \cdot r^{2v+2}} \cdot \|f\|_{L^2(B(a_j, r))}^2 \leq 2^{-(2n+2)} \cdot \|f\|_{L^2(B(a_j, r))}^2$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))} \leq 2^{-(n+1)} \|f\|_{L^2(B(a_j, r))}.$$

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq \sum_{j=1}^k \|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))} \leq 2^{-(n+1)} \cdot \sum_{j=1}^k \|f\|_{L^2(B(a_j, r))} \leq 2^{-(k+1)} \cdot k \cdot \|f\|_{L^2(\mathcal{D})}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(\mathcal{D})}$$

$\square$

L^2 -Norm auf Riemannschen Flächen ∂X ?

$$\cancel{\|f\|_{L^2(X)} = \left(\int_X |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}} \quad \textcircled{?} \quad \textcircled{3}$$

für Ketten!

(u_i^*, z_i) endlich viele Karten von X , s.d. $z_i: [u_i] \subset \subset$ eine kreisförmige Isl.

$$\mathcal{U}^* = (u_i^*)_{i=1, \dots, n}$$

$$\left[\bigcup_{+} u_i^* \subset X \text{ auspacken} \right] = |\mathcal{U}^*|$$

$$u_i \in \mathcal{U}_i^* \quad \mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)$$

L^2 -Norm auf $C^q(\mathcal{U}, \theta)$:

$$q=0: \eta = (\eta_{f_i})_{i=1, \dots, n} \in C^0(\mathcal{U}, \theta) : \|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\|\eta_{f_i} \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i[u_i])}^2}_{=: \|\eta_{f_i}\|_{L^2(u_i)}^2}$$

$$q \geq 1: \xi = (\xi_{ij})_{i,j=1, \dots, n} \in C^1(\mathcal{U}, \theta) : \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 = \sum \underbrace{\|\xi_{ij} \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i[u_i \cap u_j])}^2}_{=: \|\xi_{ij}\|_{L^2(u_i \cap u_j)}^2}$$

$$O(u_i \cap u_j)$$

$\alpha \in C^q(\mathcal{U}, \theta)$ L^2 -Integrierbar $\Leftrightarrow \|\alpha\|_{L^2(\mathcal{U})} < \infty$.

$$C_{\mathbb{Z}}^q(\mathcal{U}, \theta), \quad Z_{L^2}^q(\mathcal{U}, \theta), \quad B_{L^2}^q(\mathcal{U}, \theta).$$

Das Geschlecht Riemannscher Flächen

X Riem. Fläche, θ Garbe der hol. Fktn.
von Vektorräumen.

und $H^1(X, \theta)$ Vektorraum.

Wenn $H^1(X, \theta)$ endlich-dimensional, so sagt man " X hat endliches Geschlecht".

In diesem Fall heißt $g := \dim H^1(X, \theta)$ das Geschlecht von X .
 $\downarrow$
 $\in \mathbb{N}_0$ genau.

Beispiel: X 1-zshgd $\Rightarrow g=0$.
Zurb. $\mathbb{C}$ lokal $\hat{\mathbb{C}}$ das Geschlecht Null.



Flächen
kompakte Riem. Flächen X haben
endliches Geschlecht, d.h.
 $\dim H^1(X, \theta) < \infty$.

⑤ $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$: $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ zwei Familien offener Mengen.

$\mathcal{U} \ll \mathcal{V} \Leftrightarrow v_i \subset \subset u_i$ für alle i .

$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ } Einschränkungskomp.

$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{O})$.

$\xi \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \Rightarrow \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})} < \infty$: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \subset C_{L^2}^q(\mathcal{V}, \mathcal{O})$.

Für jedes $\varepsilon > 0$ ex. ein u_k -VR $A \subset \mathbb{R}_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ mit endl. Kodim.,
sod. $\|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \varepsilon \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathcal{V})}$ für $\xi \in A$.



Lemma X lieuen. Fläche.

$$i = 1, \dots, n.$$

$$\mathcal{U}^* = (u_i^*)_{1 \leq i \leq n}.$$

(6)

(u_i^*, z_i) Knoten und $z_i \in [u_i] \subset \mathbb{R}$ kreisförmig, $\mathcal{U}^* = (u_i^*)_{1 \leq i \leq n}$.

$$\mathcal{U} = (u_i), \quad \mathcal{U}^* = (u_i^*), \quad \mathcal{U} \subset \mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}^*.$$

Es ist $C > 0$, s.d. es für jedes $\xi \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ gilt: $\xi \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

$$\text{mit:} \quad \xi = \xi + \delta^0(q) \text{ auf } Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}),$$

$$\text{und} \quad \| \xi \|_{L^2(\mathcal{U})} + \| q \|_{L^2(\mathcal{U})} \leq C \cdot \| \xi \|_{L^2(\mathcal{U})}.$$



$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) = 0$$

↑
gleiche Elementen

Beweis

1. Schritt $\xi = (\xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in Z_{L^2}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

D.h. es ist $(g_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und

$$\xi_{ij} = g_i - g_j \text{ auf } u_i \cap u_j.$$

Wobei ξ glatt ist.

(8)

$$\xi = (F_{ij}|u_i u_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{Z}_{\ell^2}^1(\mathcal{M}, \mathcal{O})$$

$$\eta = (b_i - g_i | w_i)_{1 \leq i, j \leq n} \in C_{\ell^2}^0(\mathcal{M}, \mathcal{O}). \quad d^u(b_i - g_i | w_i) \stackrel{\text{line}}{=} d^u b_i - d^u g_i | w_i \stackrel{= w}{=} w$$

$$\psi|_{w_i=1} = 0.$$

$$F_{ij} - f_{ij} = (b_j - b_i) - (g_j - g_i) \\ = (b_j - g_j) - (b_i - g_i)$$

$$\Rightarrow \xi - \xi = d^0(\eta).$$

... $\square$...

2. Schritt: nächstes Mal