

13. Vorlesung

Dolbeault's Lemma: $X = B(0, R)$, $g \in \mathcal{E}(X)$.

Es ex. $f \in \mathcal{E}(X)$ glatt, s.d. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

Folgerung: X 1-zählige Riem. Fläche $\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

Beweis zunächst $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit kompaktem Träger.

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{C}).$$

$$\lim_{z \rightarrow z+\xi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{g(z+\xi)}{z} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{g(z+\xi)}{z} dz \wedge d\bar{z}$$

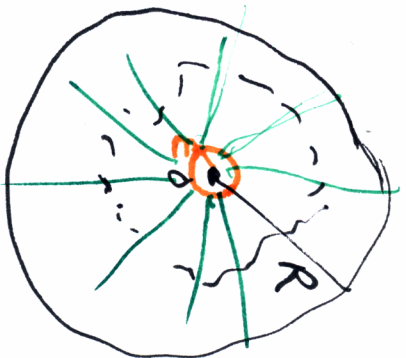
oder $B(0, R) \setminus B(0, \varepsilon)$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$g(\xi) \stackrel{?}{=} \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{g(z)}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{g(z+\xi)}{z} dz \wedge d\bar{z}$$

$$A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon \leq |z| \leq R\}.$$



$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{g(z+\xi)}{z} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} g(z+\xi) = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z+\xi) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{g(z+\xi)}{z}.$$

$$\int_{\Gamma} du = \int_{\partial A_\varepsilon} \frac{g(z+\xi)}{z} dz$$

Stokes

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(\xi, \varepsilon)} \frac{g(z+\varepsilon)}{z} dz = -\text{Res}$$

mit

$$w = \frac{1}{2\pi i} \frac{g(\xi+z)}{z} dz$$

$$dw = \frac{d'w + d''w}{dz} dz = \frac{2}{dz} dz = 1 dz$$

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} \text{Res} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} w$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi \right]$$

Werte von g auf $\partial B(\xi, \varepsilon)$.

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} w$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{g(\xi + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} \cdot \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi$$

$$= g(\xi).$$

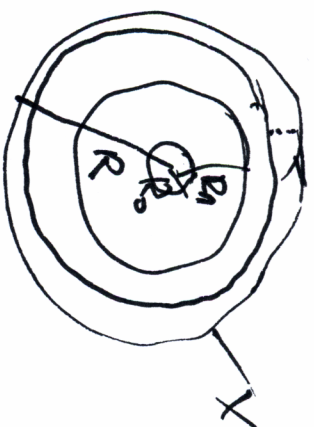
□.

Beweis von Dolebeault's Lemma allgemein.

$$X = B(0, R), g \in \mathcal{E}(X)$$

Wähle Radien $0 < R_0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n < \dots < R$.

$$\lim R_n = R.$$



(3)

$$X_n := B(0, R_n) \subset X.$$

Wähle $\eta_n \in \mathcal{E}(X)$ mit $\eta_n|_{X_n} \equiv 1$, $\underbrace{\text{supp}(\eta_n)}_{\text{kompakt}} \subset X_{n+1}$

$g_n = \eta_n \cdot g$, $\text{supp}(g_n) \subset X_{n+1}$, Setze g_n durch Null auf ganz X fort.

$g_n \in \mathcal{E}(X)$, Träger von g_n ist kompakt. ($\subset X_{n+1}$).

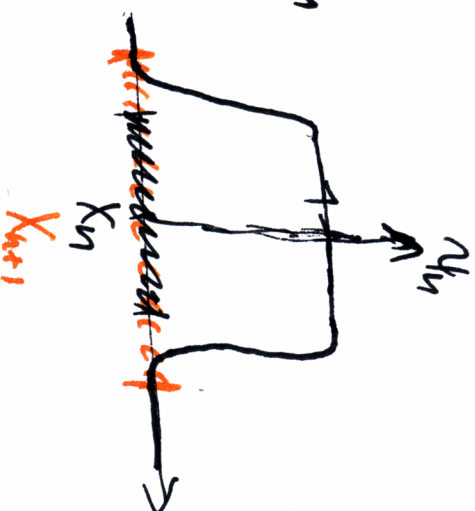
Nach dem vorher bewiesenen existiert also $f_n \in \mathcal{E}(X)$ mit:

Konstruiere induktiv $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{E}(X)$ mit:

(a) $\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}|_{X_n} = g|_{X_n}$.

(b) $\|f_{n+1} - f_n\|_{X_{n-1}, \infty} \leq 2^{-n}$.

$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = g_n$.
(= g auf X_n)



(4)

Dann

$$f_1 = f_1.$$

Seien $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig.

$$f_{n+1} - f_n = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f_{n+1} - f_n) = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = 0,$$

auf $X_n = g$ $\Rightarrow f_{n+1} - f_n$ holomorph. auf X_n . Wenn P das Taylorpolynom von

$$f_{n+1} - f_n \text{ in } 0 \text{ ist von hinreichend hohem Grad ist,}$$

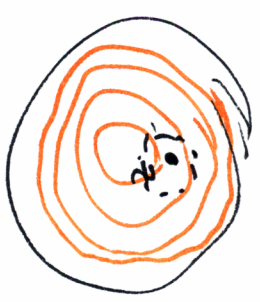
$$\text{so gilt} \quad \| (f_{n+1} - f_n) - P \|_{X_n, X_{n-1}} \leq 2^{-n}. \quad (6) \checkmark$$

$$f_{n+1} = f_{n+1} - P$$

$$\begin{aligned} (a): \quad \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} \Big|_{X_{n+1}} &= \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} \right) \Big|_{X_{n+1}} = g \Big|_{X_{n+1}} \checkmark \\ &= g_{n+1} \\ &= \psi_{n+1} \cdot g \end{aligned}$$

5

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x).$$



$(\tilde{f}_n)$ konvergiert lokal glau. gegen f .
-A stetig

$n \in \mathbb{N}$: Das gilt auf X_n : $f = \tilde{f}_n + F_n$

$$F_n = \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\partial \tilde{f}_{k+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \bar{z}} \right) = 0.$$

$$f \text{ glau auf } X_n \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \underbrace{\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}}}_{= g_n} + \underbrace{\frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}}}_{= 0}$$

$= g_n$ auf X_n .

$\Rightarrow F_n$ holomorph.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g \text{ auf ganz } X.$$

□.

$$H^1(X, \mathcal{O}) : X \text{ 1-zusammenhängend} \Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) = 0.$$

neu. Fläche



S^2

$g=0$



Torus

$g=1$



"Brezel"

$g=2$

X kompakt $\Rightarrow g := \dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.

Zshungel

g heißt das Genus der neu. Fläche X

L^2 -Integration von holomorphen Funktionen.

$D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$. $z = x + iy$

$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\int_D |f(z)|^2 dx \wedge dy \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_{L^2(D)} < \infty.$$

$f \in L^2$ -integrabel $\Leftrightarrow \|f\|_{L^2(D)} < \infty$.

Raum der holomorphen, L^2 -integrierbaren Fkt'n:
 $L^2(D, \mathcal{O})$.

Skalarprodukt
Raum

$$\langle f, g \rangle := \int_D f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

Cauchy-Schwarz.

$$\mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) = \{f \mid \|f\|_{L^2} < \infty\}\}$$

(7)

$$D \subset \mathbb{C} \text{ bounded} \Rightarrow \text{vol}(D) = \int_D dx \wedge dy < \infty.$$

$$f \in \mathcal{O}(D) \text{ bounded} \Rightarrow \|f\|_{\infty, D} < \infty.$$

$$\|f\|_{L^2(D)} = \left(\int_D \underbrace{|f(z)|^2}_{\leq \|f\|_{\infty, D}^2} dx \wedge dy \right)^{1/2} \leq \|f\|_{\infty, D} \cdot \sqrt{\text{vol}(D)}.$$

$$f, g \in L^2(D, \theta) \Rightarrow \langle f, g \rangle := \int_D f(z) \overline{g(z)} \, dz \wedge d\bar{z} < \infty.$$

$$= 2 \int_D f(x) g(y) \, dx \wedge dy$$

$$f, g \in L^2(D, \theta) \text{ orthogonal} \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0.$$

Beispiel : $D = B(a, r)$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

$$\psi_n(z) = (z-a)^n \in L^2(D, \theta), \quad \| \psi_n \|_{L^2(D)} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \cdot r^{n+1}$$

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = 0 \text{ for } n \neq m.$$

Necking: $a=0$

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int_{\mathbb{C}} \bar{z}^n \cdot z^m \, dx \wedge dy$$

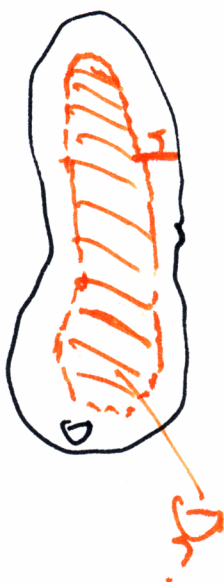
$$= \int_{r'=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} (re^{i\varphi})^n \cdot (r'e^{-i\varphi})^m \, r' dr' d\varphi$$

~~divide~~

⑧

$$f \in L^2(D, \theta) \quad \text{w.p.} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \psi_n(z).$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} r^{2n+2} \cdot |c_n|^2.$$



Ausgabe $D \subset \mathbb{C}$ offen, $r > 0$.

$$D_r = \{z \in D \mid B(z, r) \subset D\}.$$

$$f \in L^2(D, \theta), \quad \Rightarrow \|f\|_{D_r, \infty} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot r} \cdot \|f\|_{L^2(D)}. \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Beweis

$$a \in D_r. \quad \text{w.p.} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$$

Potenzreihenentwicklung. $\Rightarrow f(a) = 0$.

$$|f(a)|^2 = |c_0|^2 = \frac{1}{\pi r^2} \left(\frac{\pi}{0+1} r^{2 \cdot 0+2} \cdot |c_0|^2 \right) \leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} r^{2n+2} |c_n|^2 \right) = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \|f\|_{L^2(D)}^2.$$

$$\Rightarrow |f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot r} \cdot \|f\|_{L^2(D)}.$$

□

Korollar

$L^2(D, \mathcal{O})$ ist Hilbertraum.

Beweis

$$\underbrace{L^2(D, \mathcal{O})}_{\text{Unterraum}} \subset \underbrace{L^2(D, \mathbb{C})}_{\text{Hilbertraum}}.$$

Z. 28
 $L^2(D, \mathcal{O})$ ist abgeschlossen
 in $L^2(D, \mathbb{C})$.

$\forall \{f_n\} \subset L^2(D, \mathbb{C})$ geben ein $f \in L^2(D, \mathbb{C})$

(f_n) Folge in $L^2(D, \mathcal{O})$, die bzgl. $\|\cdot\|_{L^2(D, \mathbb{C})}$ konvergiert.

Z. 29: f holomorph.

$f_n \rightarrow f$ auf D jeweils

gleichmäßig. D.h. $f_n \rightarrow f$ kompakt gleichmäßig.

gleichmäßig. D.h. $f_n \rightarrow f$ kompakt gleichmäßig.

Nur Satz von Hurwitz folgt: f ist holomorph, $f \in L^2(D, \mathcal{O})$.