18. Vorlesung

29.04.2020 ①

$\mathfrak{U}$ off. Überdeckung des top. Raums X

$\mathcal{F}$ Garbe abelscher Gruppen auf X.

$$H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})/B^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}).$$

$$H^1(X,\mathcal{F}) = \left(\dot{\bigcup} H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})\right)/\sim$$

$$\boxed{C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 (\to \ldots)}$$

$$H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \underbrace{Z^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})}_{\cong \mathcal{F}(X)} / \underbrace{B^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})}_{=\{0\}}.$$

$$= \mathcal{F}(X).$$

$$\boxed{H^0(X,\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)}$$

$Z^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \ker(\delta^0)$

$\delta^0 : C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$

$(f_i)_{i\in I} \mapsto (f_i - f_j)_{i,j\in I}$.

$(f_i) \in Z^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \iff f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$

$\overset{(LG)}{\iff} \exists f \in \mathcal{F}(X) : f_i = f|_{U_i}$.

$\Rightarrow Z^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$.

$B^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) := \{0\}$.

Satz von Leray

X top. Raum, $\mathcal{F}$ Garbe abelscher Gruppen auf X.

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X mit

$H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \in I$.

Ein solches $\mathfrak{U}$ heißt **Leray-Überdeckung**.

Beh: $H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

| X 1-zshgde Riem. Fläche
| $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Beispiel: $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

Beweis $U_1 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$, $U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$, $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ offene Überdeckung von $\mathbb{C}^*$.

U_i 1-zshgd $\Rightarrow H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0$

$\longrightarrow U_1$

$\Rightarrow \mathfrak{U}$ Leray-Überdeckung.

$U_2 \longleftarrow$

$\overset{\text{Satz v. Leray}}{\Rightarrow} H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$.

$Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \ni (f_{ij})_{i,j \in I}$ mit Kozykelbedingung: $f_{11} = f_{22} = 0$, $f_{21} = -f_{12}$.

$f_{12} : \underbrace{U_1 \cap U_2}_{= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \to \mathbb{Z}$.

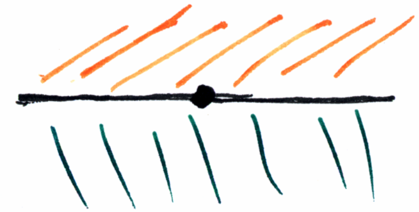
lokal-konstant.

~~Also~~ $Z^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

$B^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) \cong \Delta = \{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n_1 = n_2\}$.

$H^1(\mathbb{C}^*,\mathbb{Z}) \cong H^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\Delta \cong \mathbb{Z}$.

$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$



$\delta^0 : C^0(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) \to C^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z})$

$(f_i)_{i\in I_{1,2}} \longmapsto (f_i - f_j)_{i,j\in I_{1,2}}$

$(f_1,f_2) \longmapsto f_1 - f_2$

$U_1\cap U_2 = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$\square$

Beweis des Satzes von Leray

Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine Leray-Überdeckung von X. | $\mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K}$.

$\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ feinere Überdeckung.

$\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$.

injektiv. "Z^1/B^1"

~~$\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$~~:

$\tau : K \to I$ s.d. $V_k \subset U_{\tau(k)}$.

z.zg. $\theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ surjektiv.

$(f_{kl})_{k,l\in K} \in Z^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ gegeben.

Gesucht: $(F_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$,

s.d. $(F_{\tau(k),\tau(l)}) - (f_{kl}) \in B^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$.

④

Sei $i \in I$ fest. $(U_i \cap V_k)_{k \in K} =: U_i \cap \mathcal{V}$ offene Überdeckung von U_i.

$H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0 \Rightarrow H^1(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}, \mathcal{F}) = 0$.

$(f_{kl}|_{U_i \cap V_k \cap V_l}) \in Z^1(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}, \mathcal{F}) = B^1(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}, \mathcal{F})$

D.h. es ex. $(g_{i,k})_{k \in K} \in C^0(U_i \cap \mathcal{V}, \mathcal{F})$ mit

$$f_{kl}|_{U_i \cap V_k \cap V_l} = g_{i,k} - g_{i,l} \quad \text{für } k, l \in K.$$

Sei $i, j \in I$ fest. Dann gilt für $k, l \in K$ gilt auf $(U_i \cap U_j) \cap V_k \cap V_l$:

$$g_{ik} - g_{il} = f_{kl}|_{(U_i \cap U_j) \cap V_k \cap V_l} = g_{j,k} - g_{jl}.$$

$$\Rightarrow g_{jl} - g_{il} = g_{jk} - g_{ik}.$$

$(\underbrace{g_{jk} - g_{ik}}_{\text{def. auf } (U_i \cap U_j) \cap V_k})_{k \in K}$ def. auf $(U_i \cap U_j) \cap V_k$.

(LG): Es ex. $F_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ mit $F_{ij}|_{(U_i \cap U_j) \cap V_k} = g_{jk} - g_{ik}$. $\rightsquigarrow (F_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

$h_k := g_{\tau(k),k}|V_k .$

$$F_{\tau(k),\tau(l)} - f_{kl} = (g_{\cancel{\tau(l)},k} - g_{\tau(k),k}) - (g_{\cancel{\tau(l)},k} - g_{\tau(l),l})$$

$$= g_{\tau(l),l} - g_{\tau(k),k} = h_l - h_k$$

$$\Rightarrow (F_{\tau(k),\tau(l)} - f_{kl}) = \delta^0((h_k)_{k\in K}) \in B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

$\square$.

$$H^1(X,\mathcal{O}), \quad H^1(X,\mathcal{M}), \quad X^1(X, \underbrace{\mathcal{O}_{-D}}_{})$$

mero Fkt'en mit Pole an bestimmten Stellen.

$$\boxed{\begin{matrix} H^1(\cancel{X}\,U, \mathcal{O}) = 0. \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{O}_{-D}. \end{matrix}}$$

?

$H^1(U, \mathcal{O}) = 0$

$\uparrow$

1-zshgd.

Lemma von Dolbeault

$X = B(0,R) \subset \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$ $(R=\infty : X = \mathbb{C})$.

$g \in \mathcal{E}(X)$ gegeben. Dann ex. ein $f \in \mathcal{E}(X)$ mit:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = g. \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = g.$$

$$\boxed{\Delta u = 0}$$

Anwendung:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \bar z}$$

$g \in \mathcal{E}(X)$ gegeben $\rightsquigarrow$ Es ex. $f \in \mathcal{E}(X)$ mit $\Delta f = g$.

Beh. $X = B(0,R)$ mit $0 < R \leq \infty$. Dann ist $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ beliebige offene Überdeckung von X.

g.z.z.: $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = 0$.

$$\overset{\parallel}{Z^1 / B^1}.$$

Sei $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ gegeben. $\underline{\text{z.zg.}}$: $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

$$\begin{array}{c} Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \\ \cup \\ Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \underset{\substack{\uparrow \\ H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0.}}{=} B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}). \end{array}$$

$\boxed{H^1(X, \mathcal{E}) = 0.}$

$\Rightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0.$

Daher ex. $(\tilde{g}_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ mit

$\underset{\text{holomorph}}{\underline{\underline{f_{ij}}}} = \tilde{g}_i - \tilde{g}_j$ auf $U_i \cap U_j$. $\Rightarrow 0 = \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar z} = \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \bar z} - \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial \bar z}$

$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \bar z} = \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial \bar z}$ auf $U_i \cap U_j$.

Nach (LG) ex. $h \in \mathcal{E}(X)$ s.d. $h|_{U_i} = \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \bar z}$.

Nach Lemma v. Dolbeault ex. $g \in \mathcal{E}(X)$: $h = \frac{\partial g}{\partial \bar z}$ $\rightsquigarrow$ $g_i = \tilde{g}_i - g|_{U_i}$

$$\frac{\partial g_i}{\partial \bar z} = \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \bar z} - \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \bar z}\Big|_{U_i}}_{= h|_{U_i} = \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \bar z}} = 0$$

$g_i - g_j = (\tilde{g}_i - \cancel{g}) - (\tilde{g}_j - \cancel{g}) = \tilde{g}_i - \tilde{g}_j = f_{ij}$.

$\Rightarrow (g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

$\Rightarrow (f_{ij}) = \delta^0(\underbrace{(g_i)}_{\in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})}) \in B^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathcal{O}})$.

$\square$

<u>Beh</u>: $H^1(\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$.

<u>Beweis</u>

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = \mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}. \\ U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \end{array}\right\} \quad \mathfrak{U} = (U_1, U_2) \text{ offene Überdeckung von } \hat{\mathbb{C}}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} U_1 = B(0,\infty). & \Rightarrow H^1(U_1, \mathcal{O}) = 0. \\ U_2 = \underbrace{\tfrac{1}{z}}_{\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow[\text{biholo.}]{} \hat{\mathbb{C}}.} [U_1] & \Rightarrow H^1(U_2, \mathcal{O}) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{U} \text{ eine Leray-Überdeckung von } \hat{\mathbb{C}}.$$

$\overset{\text{Leray}}{\Longrightarrow} H^1(\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$

$(f_{ij})_{i,j \in 1,2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

$\updownarrow$

$f_{12} : \underbrace{U_1 \cap U_2}_{= \mathbb{C}^*} \xrightarrow{\text{holo}} \mathbb{C}$.

<u>z.zg.</u> $(f_{ij}) = \delta((g_i))$.

$f_{12} = \underset{\mathcal{O}(\mathbb{C})}{\underset{\cap}{g_1}} - \underset{\mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})}{\underset{\cap}{g_2}}$

$\square$.

<u>Korollar</u>: Ist X eine einfach zshängende Riemannsche Fläche, so gilt $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

Lemma: Sei $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ gegeben mit kompaktem Träger.
Dann ex. $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

Beweis

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z-\xi} \, dz \wedge d\bar{z}$$

beschränkt? Ja!

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|z|} \, dz \wedge d\bar{z} \underset{z = re^{i\varphi}}{=} \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{|\cancel{r}e^{i\varphi}|} \cdot \cancel{r} \, dr \, d\varphi = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dr \, d\varphi = 2\pi \underline{< \infty}.$$

$\rightsquigarrow f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\frac{g(z)}{z-\xi} \right) dz \wedge d\bar{z} \overset{?}{=} g(\xi)$$

...