23.04.2020 ①

X top. Raum, $\mathcal{F}$ Garbe abelscher Gruppen

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X.

1. Kohomologiegruppe $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

1-Kozykel: $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \{ (\underbrace{f_{ij}}_{\in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)})_{i,j \in I} \mid f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \}$

Kozykelbedingung

$\cup$

1-Koränder $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \{ (\underbrace{f_{ij}}_{\in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)})_{i,j \in I} \mid \exists (\underbrace{g_i}_{\in \mathcal{F}(U_i)}) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) : f_{ij} = g_i - g_j \}$

<u>Aussage</u> X Riemannsche Fläche, $\mathcal{E}$ Garbe der glatten Funktionen auf X.
$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung.

$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$

<u>Beweis</u> z.zg.: $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \subset B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$.

$\Downarrow$

$(f_{ij})_{i,j \in I}$

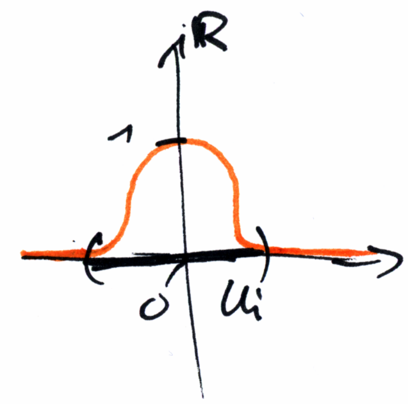
Beh.: $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$, d.h. es ex. ein $(\underline{\underline{g_i}}) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ mit $(f_{ij}) = \delta^0((g_i))$,

d.h. $f_{ij} = g_i - g_j$.

Verwende Zerlegung der Eins $(\varphi_i)_{i\in I}$ zu $(U_i)_{i\in I}$,

d.h. $\varphi_i \in C^\infty(X)$, $0 \le \varphi_i \le 1$, $\mathrm{Tr}(\varphi_i) \subset U_i$,

$\underbrace{\sum \varphi_i}_{\text{Summe}} = 1$. lokal-Endlich



$i,k \in I$: $\varphi_k \cdot f_{ik} \in \underset{\mathcal{E}}{C^\infty}(U_i \cap U_k)$. Wegen $\mathrm{Tr}(\varphi_k) \subset U_k$ lässt sich $\varphi_k \cdot f_{ik}$ durch Null glatt auf U_i fortsetzen. $\rightsquigarrow$ $\varphi_k \cdot f_{ik} \in \mathcal{E}(U_i)$.

$g_i := \sum_{k\in I} \varphi_k \cdot f_{ik} \in \mathcal{E}(U_i)$. $\rightsquigarrow$ $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$.

$$g_i - g_j = \sum_{k\in I} \varphi_k \cdot f_{ik} - \sum_{k\in I} \varphi_k \cdot f_{jk} = \sum_{k\in I} \varphi_k \underbrace{(f_{ik} - f_{jk})}_{= f_{ij}} = \underbrace{\Big(\sum_{k\in I} \varphi_k\Big)}_{=1} f_{ij} = f_{ij}.$$

$\square$.

<u>Aufgabe</u> X Riem. Fläche, <u>einfach zshgd.</u>, $\mathfrak{U}$ off. Überdeckung.

Dann $\begin{cases} H^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{C}}) = 0 \\ H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0. \end{cases}$

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$. $\qquad \mathcal{V} < \mathfrak{U}$.

$\mathcal{V} = (V_k)_{k \in K}$ heißt <u>feiner</u> als $\mathfrak{U}$, wenn für jedes $k \in K$ ein $i \in I$ existiert, mit $V_k \subset U_i$.

D.h. es ex. eine ~~Ab~~ „Verfeinerungsabb.“ $\tau : K \to I$ mit $V_k \subset U_{\tau(k)}$ für alle $k \in K$.

$O = U_i$

$O = V_K$.

$$Z^1/B^1 = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}} H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

Weiter $\mathcal{V} < \mathfrak{U}$.

Konstruiere Abbildung $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}} : Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ Gruppenhomo. mit $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}[B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})] \subset B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

Dann induziert $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}$ einen Gruppenhomomorphismus $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

$(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.
auf $U_i \cap U_j$

$(\tilde{f}_{kl})_{k,l \in I} : \tilde{f}_{kl} = f_{\tau(k),\tau(l)}|_{V_k \cap V_l}$.

$$\rightsquigarrow \underbrace{(\tilde{f}_{kl})_{k,l \in K}}_{=: \Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}((f_{ij}))} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

<u>Beh.</u> $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}[B^1(\mathfrak{U},F)] \subset B^1(\mathcal{V},F)$.

Ψ

(f_{ij}). Dann ex. $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},F)$ mit $f_{ij} = g_i - g_j$

$k\in K$: $\tilde g_k = g_{\tau(k)}|V_k$. $\rightsquigarrow$ $(\tilde g_k) \in C^0(\mathcal{V},F)$.

$$\tilde g_k - \tilde g_\ell = g_{\tau(k)}|V_k - g_{\tau(\ell)}|V_\ell = (g_{\tau(k)} - g_{\tau(\ell)})|V_k\cap V_\ell = f_{\tau(k),\tau(\ell)}|V_k\cap V_\ell$$

$$= \left(\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}((f_{ij}))\right)_{k,\ell}.$$

$\Rightarrow \Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}((f_{ij})) \in B^1(\mathcal{V},F)$. $\square$.

<u>Beh.</u> $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}: H^1(\mathfrak{U},F) \longrightarrow H^1(\mathcal{V},F)$ ist von der Wahl der Verfeinerungsabbildung $\tau: K\to I$ unabhängig.

<u>Beweis</u>: $\tau,\hat\tau: K\to I$ zwei Verfeinerungsabbildungen.

$(\tilde f_{k\ell})_{k,\ell\in K}$, $\tilde f_{k\ell} = f_{\tau(k),\tau(\ell)}|V_k\cap V_\ell$

$(\hat f_{k\ell})_{k,\ell\in K}$, $\hat f_{k\ell} = f_{\hat\tau(k),\hat\tau(\ell)}|V_k\cap V_\ell$.

$\Bigr\} \; Z^1(\mathcal{V},F)$

<u>Beh.</u> $(\tilde f_{k\ell} - \hat f_{k\ell})_{k,\ell} \in B^1(\mathcal{V},F)$.

$k \in K. \rightsquigarrow V_k \subset U_{\tau(k)} \cap U_{\hat{\tau}(k)}$

$f_{\tau(k),\hat{\tau}(k)}$.

$h_k = f_{\tau(k),\hat{\tau}(k)} \big|_{V_k}$. ~~Beh.:~~ $\rightsquigarrow (h_k)_{k\in K} \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

<u>Beh.</u> $\tilde{f}_{kl} - \hat{f}_{kl} = h_k - h_l$. auf $V_k \cap V_l$.

$$\tilde{f}_{kl} - \hat{f}_{kl} = f_{\tau(k),\tau(l)} - f_{\hat{\tau}(k),\hat{\tau}(l)} = \underbrace{f_{\tau(k),\tau(l)} + f_{\tau(l),\hat{\tau}(k)}}_{\overset{(KZB)}{=} f_{\tau(k),\hat{\tau}(k)} = h_k} \overbrace{- f_{\tau(l),\hat{\tau}(k)}}^{\text{wahrhafte Null}} \underbrace{- f_{\hat{\tau}(k),\hat{\tau}(l)}}_{\overset{(KZB)}{=} -f_{\tau(l),\hat{\tau}(l)} = -h_l}$$

$= h_k - h_l$.

$\Rightarrow (\tilde{f}_{kl} - \hat{f}_{kl}) \in B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

$\square$.

(6)

Beh. $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ injektiv. $\qquad H^1 = Z^1 / B^1$

Gegeben: $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ mit $\underbrace{\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}((f_{ij}))}_{(\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell \in K}} \in B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, d.h. $\tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k),\tau(\ell)} |_{V_k \cap V_\ell}$.

<u>z.zg.</u>: $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Also ex. $(g_k)_{k \in K} \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ mit $\tilde{f}_{k\ell} = g_k - g_\ell$.

$i \in I$ fest.: Auf $U_i \cap V_k \cap V_\ell$: $g_k - g_\ell = \tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k),\tau(\ell)} \overset{(KZB)}{=} f_{\tau(k),i} + f_{i,\tau(\ell)}$

$\left(\left(= f_{\tau(k),i} - f_{\tau(\ell),i}\right)\right) = f_{i,\tau(\ell)} - f_{i,\tau(k)}$

$\Rightarrow f_{i,\tau(k)} + g_k = f_{i,\tau(\ell)} + g_\ell$.

$(f_{i,\tau(k)} + g_k)_{k \in K}$

Garbenaxiom (LG): Es ex. $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $h_i|_{U_i \cap V_k} = f_{i,\tau(k)} + g_k$.

$\rightsquigarrow (h_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. $\qquad$ z.zg.: $h_i - h_j = f_{ij}$ auf $U_i \cap U_j$.

$i,j \in I$ fest. Für $k \in K$ gilt auf $(U_i \cap U_j) \cap V_k$:

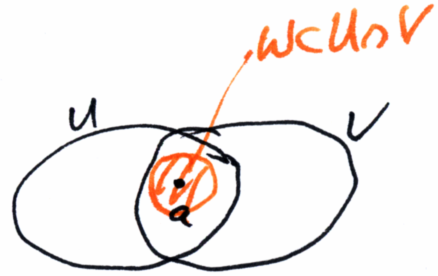
$h_i - h_j = (f_{i,\tau(k)} + g_k) - (f_{j,\tau(k)} + g_k) = f_{i,\tau(k)} - f_{j,\tau(k)} \overset{(KZB)}{=} f_{i,j}$.

Garbenaxiom (GL): $h_i - h_j = f_{ij}$ auf $U_i \cap U_j$. $\Rightarrow (f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

$\square$

$\mathfrak{W} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, $\quad \underbrace{\mathfrak{W} \overset{\tau_2}{<} \mathfrak{V} \overset{\tau_1}{<} \mathfrak{U}}_{\tau_2 \circ \tau_1}$

$$\begin{array}{c} H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \\ \downarrow \Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} \\ H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \\ \downarrow \Theta^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} \\ H^1(\mathfrak{W},\mathcal{F}) \end{array} \qquad \Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}} = \Theta^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} \circ \Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$$



$\dot{\bigcup\limits_{\mathfrak{U}}} H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \,/\sim$

$\xi \in H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, $\eta \in H^1(\mathfrak{U}',\mathcal{F})$.

$\xi \sim \eta \;:\Longleftrightarrow$ Es ex. eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ $(\mathfrak{V} < \mathfrak{U},\ \mathfrak{V} < \mathfrak{U}')$, s.d. $\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) = \Theta^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta) \in H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$

$H^1(X,\mathcal{F}) = \left(\dot{\bigcup\limits_{\mathfrak{U}}} H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})\right) /\sim$ | Erste Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$.

$x, y \in H^1(X,\mathcal{F})$ $\quad x+y = ?$ $\quad \xi \in H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, $\eta \in H^1(\mathfrak{U}',\mathcal{F})$, $[\xi] = x$, $[\eta] = y$, $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$

$[\Theta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) + \Theta^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta)] =: x+y$.

Es gibt eine kanonische Abbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}).$$

Diese Abbildung ist injektiv. Deswegen folgt:

<u>Aussage</u> $H^1(X, \mathcal{F}) = 0 \iff H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ für jede offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X.

<u>Aussage</u> X Riemannsche Fläche, $\mathcal{E}$ Garbe der glatten Fkt'e.

(a) Dann ist $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$.

(b) Ist X einfach zusammenhängend, so gilt $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$
$H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}^*, \mathcal{F})$$

Leray-Überdeckung.