

Garben

abelsche Gruppe

①

22.04.2020

X top. Raum, $\mathcal{F} = \{F(U) \mid U \subset X \text{ offen}\}$, $\mathcal{F}^u: F(U) \rightarrow F(U)$, $f \mapsto f|_U$

$U \subset V$

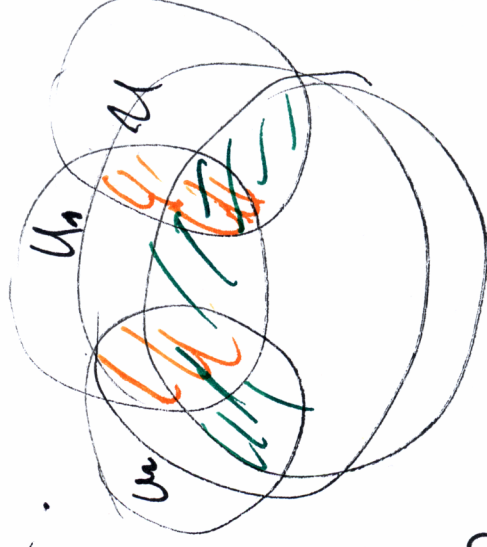
(GL) $f, g \in F(U)$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen $\Rightarrow$

$(\forall i: f|_{U_i} = g|_{U_i}) \Rightarrow f = g$

(LG) $U = \bigcup U_i$, $f_i \in F(U_i)$

$\forall i, j: f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$

$\Rightarrow \exists f \in F(U): \forall i: f|_{U_i} = f_i$



$\mathcal{O}(X)$, $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{E}(X)$

Garben von kommutativen
Ringen mit Eins

Def X top. Raum., F, G (Prä-) Garben. von abelschen Gruppen. (2)

Ein (Prä-) Garben-Isomorphismus ist eine Familie $(f_u)_{u \in X} = f$
 offen $f: F \rightarrow G$

von Isomorphismen $f_u: F(u) \rightarrow G(u) \rightarrow \text{Ab}$, s.d. jeweils

$\hookrightarrow \forall u \in U$ offen

$$\begin{array}{ccc} F(u) & \xrightarrow{f_u} & G(u) \\ \downarrow \rho_u & \Downarrow & \downarrow \rho_u \\ F(V) & \xrightarrow{f_V} & G(V) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \rho_u \\ \downarrow \rho_u \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \rho_u \\ \downarrow \rho_u \end{array}$$

$$\rho_u \circ f_u = f_V \circ \rho_V$$

Die f_u sind Isomorphismen.

f Isomorphismus $\Leftrightarrow$ Die f_u sind Isomorphismen.

Def $(\ker f)(u) := \ker f_u$.

F, G Garben $\Rightarrow \ker f$ Prägarbe.

$(\ker f)(u) := \ker f_u$.

F, G Prägarben $\Rightarrow \ker f$ Prägarbe.

F, G Garben $\Rightarrow \ker f$ Garbe.

aber: i.A. keine Garbe.

F, G Garbe $\Rightarrow \ker f$ Untergarbe von F ,
 die $(\ker f)$ umfasst. Bildgarbe.

Beispiel

X Riemannsche Fläche.

$\leadsto$

$\mathcal{O}$ Garbe der hol. Fkt'n

$\mathcal{O}^*$

Garbe der invertierbaren hol. Fkt'n.

$$\exp(2\pi i \cdot): \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*:$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}^*(U) \\ f &\mapsto \exp(2\pi i \cdot f) = g \end{aligned}$$

$U \subset X$ offen
 $e^{xy} = e^x \cdot e^y$

Garben-Homomorphismen

$\Gamma_U \mapsto G$ als Garbe
der lokal-kont. Fkt'n
mit Werten in G

$$\ker(\exp(2\pi i \cdot)) = \mathbb{Z}$$

$$\ker(\exp(2\pi i \cdot)) = \{g \in \mathcal{O}^*(U) \mid \exists f \in \mathcal{O}(U): \exp(2\pi i f) = g\}$$

$\subsetneq \mathcal{O}^*(U)$, falls U nicht
einfach zshgnd.

$\hookrightarrow$ ist keine Garbe,
weil Prägarbe.

$$\ker(\exp(2\pi i \cdot)) = \mathcal{O}^*(U).$$

(4)

$$\rightarrow \dots \rightarrow \underbrace{S \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\psi} K \rightarrow J \rightarrow \dots}_{\text{exakte Sequenz}}$$

exakte Sequenz: $\Leftrightarrow \text{im}(\psi) = \ker(\psi)$

kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\psi} H \rightarrow 0$$

$\uparrow$ ψ injektiv $\text{im}(\psi) = \ker(\psi)$ $\uparrow$ ψ surjektiv.

Beispiele X 2-dim. Fläche

ist eine kurze exakte Sequenz.

(a) $0 \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp(2\pi i)} \mathcal{O}^* \rightarrow 1$

(b) $0 \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \rightarrow 0$

$\Omega^1 =$ Garbe der hol. 1-Formen vom Typ $(1,0)$

$\Omega^2 =$ Garbe der hol. 2-Formen.

$$\boxed{d \circ d = 0}$$

(5) $\mathcal{E}^{(0,1)}$: Garbe der glatten 1-Formen vom Typ $(0,1)$.

$$(c) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\quad \checkmark \quad} \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

$\uparrow$
Dolbeault'sches Lemma

Homologie

$$\boxed{\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0.}$$

$\ker(\delta^k) \subset \operatorname{Im} \delta^{k-1}$
 $B^k \subset Z^k$

Was ist Kohomologie?

$$C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2} C^3 \xrightarrow{\delta^3} \dots$$

allgemein:

Kokettenkomplex.

$$Z^k = \ker(\delta^k), \quad B^k = \operatorname{Im}(\delta^{k-1}),$$

Kozykel Koränder

$H^1(0,1,5)$

$$H^k = Z^k / B^k \quad \text{Kohomologiegruppe.}$$

$$C^k(X, \mathcal{O})$$

hier Čech-Kohomologie: $C^k = C^k(X, \mathcal{F})$

$\uparrow$
top. Raum

$\nwarrow$
Garbe

$\mathcal{M}$
 $\mathcal{O}_D$

$$k \leq 2.$$

⑥

Def X top. Raum., $\mathcal{F}$ Garbe von abelschen Gruppen.

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X .

(a) $q \in \mathcal{U}_0$. Eine q -Kokette von $\mathcal{F}$ bzgl. $\mathcal{U}$ ist

eine Familie $(f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in I}$ s.d.

$$f_{i_0, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}).$$

$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ abelsche Grp der q -Koketten.

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$(f_i)_{i \in I} \mapsto (g_{ij} = f_i - f_j)_{\substack{U_i \cap U_j \\ U_i \cap U_j}}$$

$$\bullet \delta^1 : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$(f_{ij})_{i,j \in I} \mapsto (g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})_{\substack{U_i \cap U_j \cap U_k \\ U_i \cap U_j \cap U_k}}$$



K_0 -Kette

$$\boxed{\delta^1 \circ \delta^0 = 0}$$

Beispiel

$$(f_i)_{i \in I} \in C^0(U, F)$$

$$(f_i) \in \underbrace{\ker(\delta^0)}_{=Z^0(U, F)} \Leftrightarrow \delta^0((f_i)) = 0$$

$$= Z^0(U, F) \Leftrightarrow (f_i - f_j)_{i, j \in I} = 0$$

$$\Leftrightarrow f_i|_{U \cap U_j} = f_j|_{U \cap U_j} \text{ für alle } i, j.$$

$$\Leftrightarrow \text{Es ex. } f \in F(X) \text{ mit } f|_{U_i} = f_i \\ \text{für alle } i \in I.$$

7

$$\underbrace{Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})}_{(1-\text{Kozykel}} \neq \ker(\delta^1) \subset C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

$$\psi \quad (f_{ij})_{i,j \in I} \quad \text{auf } U_i \cap U_j$$

$$\delta^1((f_{ij})) = (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})_{i,j,k \in I}$$

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \Leftrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \end{array} \right\}}_{\text{Kozykelbedingung}} \quad \text{für alle } i, j, k \in I$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$.

(KZB).

$$(KZB) \Rightarrow f_{ii} = 0, \quad f_{ij} = -f_{ji}.$$

$$\begin{aligned} B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \text{im}(\delta^0). \\ &= \\ (f_{ij}) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\Leftrightarrow \exists s \text{ ex. } (g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ &\quad \text{mit } (f_{ij}) = \delta^0((g_i)) \end{aligned}$$

(1-) Koränder

$$\text{d.h. } f_{ij} = g_i - g_j.$$

"(f_{ij}) spaltet".

⑧

9)

$$\delta^1 \circ \delta^0 = 0 \Rightarrow B^1(\mathcal{U}, F) \subset Z^1(\mathcal{U}, F)$$

$$\underline{\text{Def}} \quad H^1(\mathcal{U}, F) := Z^1(\mathcal{U}, F) / B^1(\mathcal{U}, F)$$

↑
abhängig von $\mathcal{U}$.

(Erste) Kohomologie-
gruppe.
bez. $\mathcal{U}$ und F .
abelsche Gruppe.

$$H^1(\mathbb{A}, \mathcal{U}, \mathbb{Z}) = 0.$$

Beispiele : X Riem. Fläche,

$$H^1(X, \mathbb{Z})$$