02.04.2020 ①

- **Garben**

X top. Raum mit Topologie $\mathcal{T}$.

<u>Df</u> Eine <u>Prägarbe</u> von abelschen Gruppen auf X ist ein Paar $(\mathcal{F}, \rho)$ bestehend aus

- einer Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{T}}$ von abelschen Gruppen,
- eine Familie $\rho = (\rho_V^U)_{U,V \in \mathcal{T},\, V \subset U}$ von Homomorphismen $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$,

  ↑ <u>Einschränkungshomomorphismen</u>

s.d. gilt:

- $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- $W \subset V \subset U : \rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.

$$\underset{\mathcal{F}(U)}{\rho_V^U(f)} =: f|_V \in \mathcal{F}(V)$$

$U \subset X$ offen.

$\mathcal{C}(U) := \{ f : U \to \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C} \text{ stetig} \}$. Ring (abelsche Gpe)

$V \subset U$

↑ offen.

$\rho_V^U : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V),\ f \mapsto f|_V$

↑ Homomorphismus

Prägarbe: $\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}(U)$ <u>Schnitt</u> von $\mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}(X)$ <u>globaler Schnitt</u>.

Beispiel

X Riemannsche Fläche.

$U \in \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{O}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph} \}$.

$\mathcal{M}(U) = \{ f : U \to \hat{\mathbb{C}} \mid f \text{ meromorph} \}$.

$\mathcal{E}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ glatt} \}$

Ringe (kommutative Ringe mit Eins)

OKA. $\mathcal{O}^*$ $\mathcal{M}^*$

$U, V \in \mathcal{T},\ V \subset U : \ \rho^U_V : f \mapsto f|_V$.

$\rightsquigarrow$ Prägarbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Fkt'en
$\mathcal{M}$ meromorphen Fkt'en.
$\mathcal{E}$ glatten Fkt'en

Prägarben von kommutativen Ringen mit Eins.

⚠ $\mathcal{M}$ ist keine Prägarbe von Körpern.

Df Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ ist eine <u>Garbe</u>, wenn sie die folgenden Garbenaxiome erfüllt: Für $U \in \mathcal{T}$, $U_i \in \mathcal{T}$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ (I Indexmenge)

(GL) $f, g \in \mathcal{F}(U)$: Wenn $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$, ~~dann~~ dann $f = g$.

(LG) $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ gegeben.

Es gelte: $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$.

Dann ex. ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Bemerkung:
- Das f in (LG) ist eindeutig bestimmt.
- $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.

<u>Beispiele für Garben</u>: $\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{M}, \mathcal{E}$ sind Garben von Ringen.

<u>Beispiel</u>

- X top. Raum, G abelsche Gruppe.

$\emptyset \neq U \subset X$ offen $\rightsquigarrow$ $\mathcal{G}(U) = \{ f : U \to G$ <u>lokal</u> konstant $\}$. <u>konstant</u>?

(≙ f konstant auf jeder Zshangskomponente von U.)

$$\mathcal{G}(\emptyset) = \{0\}$$

$\emptyset \neq V \subset U$ $\rightsquigarrow$ $\rho^U_V : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V),\ f \mapsto f|_V$.

$$\rho^U_\emptyset : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(\emptyset),\ f \mapsto 0.$$

$\mathcal{G}$ eine Garbe von abelschen Gruppen. „<u>konstante Garbe</u>"

G

Aussage

X ein top. Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Ringen mit Eins über X.

$U \subset X$ offen $\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}^*(U)$ = multiplikative Gpe der invertierbaren Elte in $\mathcal{F}(U)$

① $V \subset U \subset X$ offen $\rightsquigarrow$ $\rho^U_V[\mathcal{F}^*(U)] \subset \mathcal{F}^*(V)$.

② $(\mathcal{F}^*, \rho)$ ist eine Garbe von abelschen Gruppen, $\rightsquigarrow \mathcal{O}^*, \mathcal{M}^*$

die Garbe der invertierbaren Elemente von $\mathcal{F}$.

Beweis 1_U sei das Einselt. von $\mathcal{F}(U)$. $1_U|_V = 1_V$. $V \subset U$

zu ①: $f \in \mathcal{F}^*(U)$. Es. ex. $g \in \mathcal{F}(U)$ mit $g \cdot f = 1_U$.

$(g|_V) \cdot (f|_V) = (g \cdot f)|_V = 1_U|_V = 1_V$. $\Rightarrow f|_V \in \mathcal{F}^*(V)$.

$\Rightarrow (\mathcal{F}^*, \rho)$ ist Prägarbe.

zu ②: (GL) ✓

<u>zu (LG):</u> Gegeben sei $f_i \in \mathcal{F}^*(U_i)$ $\quad U = \bigcup_{i\in I} U_i$

und $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ $\quad \hat{\mathcal{F}}(U_i)$

Wegen (LG) für $\cancel{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$ ex. $f \in \mathcal{F}(U)$ s.d. $f|U_i = f_i$ $\forall i$.

z.z.: $f \in \mathcal{F}^*(U)$.

Wegen $f_i \in \mathcal{F}^*(U_i)$ ex. jeweils $g_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $g_i \cdot f_i = 1_{U_i}$.

$$(g_i)|_{U_i\cap U_j} \cdot (f_i)|_{U_i\cap U_j} = (g_i \cdot f_i)|_{U_i\cap U_j} = 1_{U_i}|_{U_i\cap U_j} = 1_{U_i\cap U_j}$$

$$= \ldots = (g_j)|_{U_i\cap U_j} \cdot \underbrace{(f_j)|_{U_i\cap U_j}}_{=(f_i)|_{U_i\cap U_j}}$$

$$\Rightarrow (g_i)|_{U_i\cap U_j} = (g_j)|_{U_i\cap U_j}.$$

Nach (LG) für $\mathcal{F}$ ex. $g \in \mathcal{F}(U)$ mit $g|U_i = g_i$ für alle $i \in I$.

$$(g\cdot f)|U_i = (g|U_i)\cdot(f|U_i) = g_i \cdot f_i = 1_{U_i} = (1_U)|U_i$$

$$\overset{(GL)}{\Longrightarrow} g\cdot f = 1_U \;.\; \Rightarrow f \in \mathcal{F}^*(U).$$

$\square$

<u>Keime</u>

X top. Raum, $\mathcal{F}$ Garbe abelscher Gpen auf X.

$a \in X$.

Betrachte Paare (U, f) mit $a \in U \subset X$ offen, $f \in \mathcal{F}(U)$.

$(U,f) \sim_a (V,g) \;:\Leftrightarrow$ Es ex. $W \subset U \cap V$ offen mit $f|W = g|W$.

Ein <u>Keim</u> von $\mathcal{F}$ in a ist eine Äquivalenz~~...~~klasse von $\sim_a$.

Der <u>Halm</u> $\mathcal{F}_a$ von $\mathcal{F}$ in a ist die Menge aller Keime von $\mathcal{F}$ in a.

$\uparrow$ ist abelsche Gruppe.

$[(U,f)]_{\sim_a} =: f_a \qquad f \in \mathcal{F}(U)$

$f_a \in \mathcal{F}_a$

<u>Beispiel</u> X Riemannsche Fläche, $a \in X$.

$\mathcal{O}_a \cong \mathbb{C}\{z-a\}$, Ring der konvergenten Potenzreihen in der Variablen $z-a$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{M}_a \cong \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^k \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\ c_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Laurentreihen mit endlichem Hauptteil und konvergentem Nebenteil

=

Homomorphismen von Prägarben, Garben

X top. Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei Prägarben. $\qquad \mathcal{F} : \mathcal{F}(U), \rho^U_V$

Ein Homomorphismus von Prägarben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Familie von Homomorphismen $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ (für $U \subset X$ offen) s.d. für $V \subset U \subset X$ offen jeweils das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho^U_V \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \rho^U_V \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[f_V]{} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Bild, Kern von einem Prägarbenhomo. sind wieder Prägarben.

Bei einem Garbenhomomorphismus, ist der Kern eine Garbe, aber das Bild i.A. nur eine Prägarbe.