

01.04.2020

(7)

X kompakte, planare Riem. Fläche

$$\Rightarrow X \cong \mathbb{C}$$

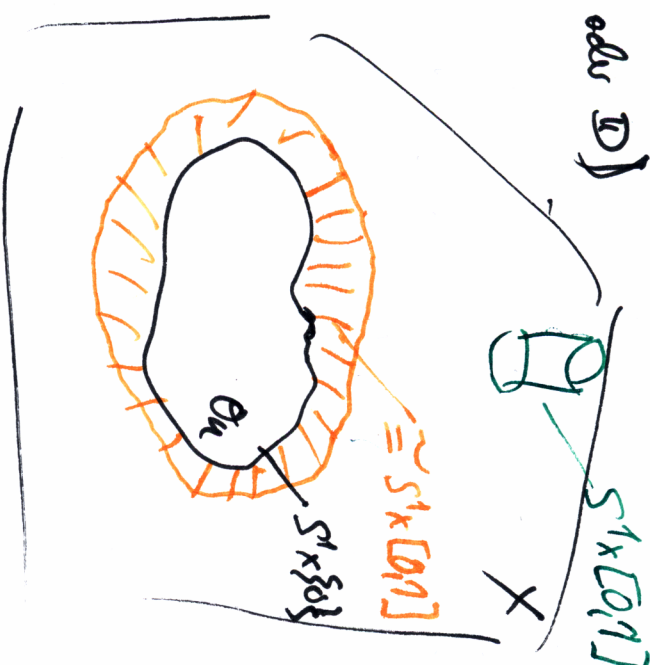
X nicht-kompakt, planar.

$$(\text{Z. 28.}) \quad X \cong \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{D}$$

Lemma

Es gibt eine Überdeckung (U_i) von X mit

- U_i kompakt, ∂U_i besitzt Kragen
- ∂U_i besitzt in jedem Punkt eine Barriere.



Beh. Jeder U_i ist biholomorph äquivalent zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$.

$(\Rightarrow)$ X ist biholomorph zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$.

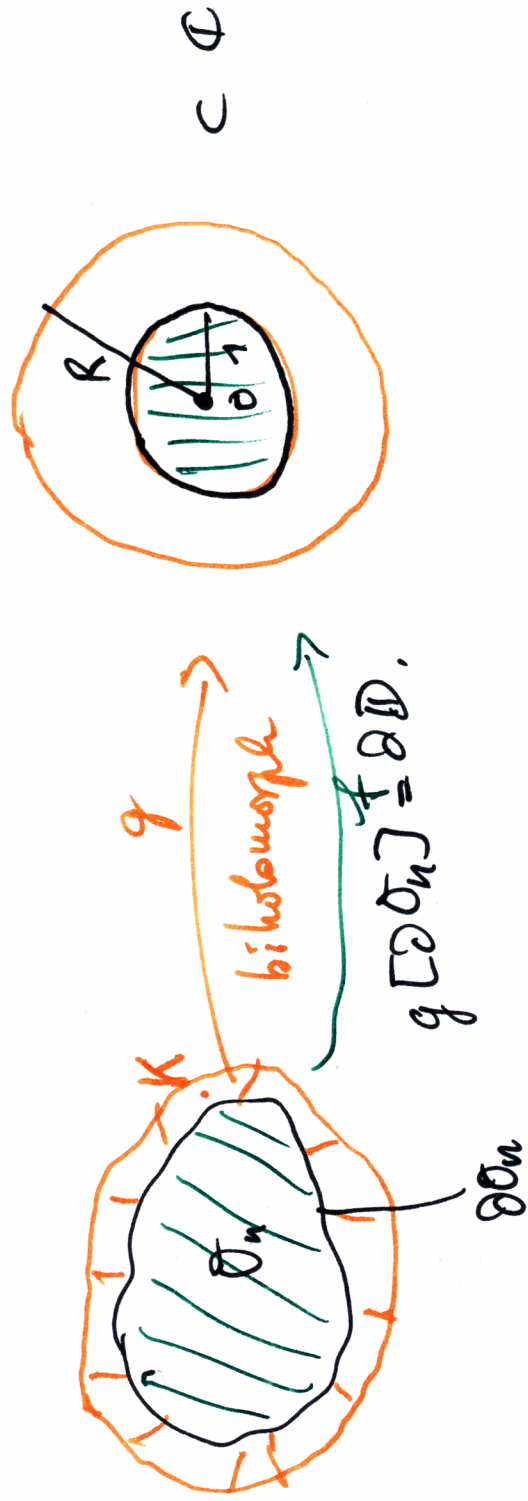
$\Downarrow$ hl. Riem. Abb. Satz

Aussage 2.38)

$$X \cong \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{D}.$$

Beweis

②



$\operatorname{Re}(g)$ harmonische Funktionen.

Löse Dirichlet-Problem auf $\bar{\Omega}_n \rightsquigarrow u: \bar{\Omega}_n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
 $\cdot u|_{\partial\Omega_n}$ harmonisch

$$\cdot u|_{\partial\Omega_n} = \operatorname{Re}(g)|_{\partial\Omega_n}$$

$du + i \cdot *du$ geschlossen

$$\text{Es. ex. } f: \bar{\Omega}_n \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } df = du + i \cdot *du$$

$\Rightarrow$ $\times$ planar f ist biholomorph, $\operatorname{Re}(f) = u$

$$\downarrow \quad \quad \quad f|_{\partial\Omega_n} = g|_{\partial\Omega_n} \Rightarrow (f|_{\partial\Omega_n})^{\max.} = 1 \text{ Prinzip}$$

f injektiv? Ja! $\Omega_n \cong f[\Omega_n] \subset \mathbb{C}$. □

$$f[\bar{\Omega}_n] \subset \mathbb{D} \cap \mathbb{C}.$$

Großer Riemannscher Abbildungssatz

③

X Riemannsche Fläche. Dann sind äquivalent:

(a) Jede geschlossene, glatte 1-Form auf X ist exakt.

$\checkmark \Leftrightarrow$ (b) X ist biholomorph äquivalent zu $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{D}$.

$\checkmark \Leftrightarrow$ (c) X ist einfach zusammenhängend.

$$w \leadsto f(x) = \int_{x_0}^x w$$

(*) Integral wegunabhängig? Dann f glatt, $df=w$



Ja, weil des Monodromiesatzes

auch in Riem. Flächen gilt. $\square$

④

Kleines Riem. Abbildungssatz

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, planar (oder einfach zusammenhängend)

$G \neq \mathbb{C} \Rightarrow G$ biholomorph äquivalent zu $\mathbb{D}$.

$G \neq \mathbb{C} \Rightarrow$

Über Möbiustransf. f sind $f[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$: $z \mapsto \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, $z_0 \in \mathbb{D}$

$f(z) = e^{i\varphi} \cdot \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

$f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : f[\mathbb{D}] = \mathbb{D} \Leftrightarrow f(z) = 0$

zu $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ gibt es $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $f[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ und $f(z_0) = z_1$.

zu $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ gibt es $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $f[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ und $f(z_0) = z_1$.
 $G \subsetneq \mathbb{C}$, planar $\Rightarrow$ Auf G besitzen wir Riem. Abb. Stammfkt'n.

Beweis v. W. R. Abb. Satz: $G \subsetneq \mathbb{C}$, planar, $0 \in G$.

1. Schritt: G ist bihol. zu $\tilde{G} \subset \mathbb{D}$, $0 \in \tilde{G}$.
 "Quadratwurzel"

$\exists \omega \in G$.

$\omega[G] \cap (-\omega[G]) = \emptyset$.

$z \mapsto \frac{z}{\omega(z)+\varepsilon}$, $G \rightarrow \tilde{G} \subset \mathbb{D}$

$\downarrow$ Möbiustransf. $\in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.



2. Schritt: $0 \in G \subset \mathbb{D}$

(5) Ziel: Es gibt ein $f \in F$, das surjektiv ist.

$F := \{f: G \rightarrow \mathbb{D} \text{ holomorph, injektiv, } f(0)=0\} \neq \emptyset$

Beh.: Wenn $f \in F$ nicht surjektiv ist, dann ex. ein $\tilde{f} \in F$ mit $|\tilde{f}'(0)| > |f'(0)|$

3. Schritt zeige, dass F ein Σ -lt. f enthält, s.d. $|f'(0)|$ maximal ist.

2. Schritt $\Rightarrow f$ surjektiv, d.h. $f: G \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorph.

$$1 \leq s_0 = \sup \left\{ |f'(0)| \mid f \in F \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} < \infty. \quad \varepsilon > 0, \text{ s.d. } \overline{B(0, \varepsilon)} \subset G.$$

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \partial B(0, \varepsilon)$$

Es ex. (f_n) in F , s.d. $|f_n'(0)| \rightarrow s_0$.

$$|f_n| \leq 1$$

$\Rightarrow (f_n)$ besitzen Teilfolge, die gegen ein holo. $f: G \rightarrow \mathbb{D}$ konvergiert.

$$|f'(0)| = s_0 \geq 1$$

$$\Rightarrow f \text{ injektiv, } f \in F. \quad |f_n'(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n'(0)| \Rightarrow |f_n'(0)| = s_0.$$

□

6

Beh. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ bihol. $\Rightarrow f$ Einschränkung
einer Möbius-Transformation.

Beweis:

Es gibt eine Möb-Transf g mit $g[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$, $g(f(0)) = 0$
 $h = g \circ f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $|h'(0)| \leq 1$ (Lemma von Schwarz).

$\mathbb{D}_f$, h surjektiv. Bew. des hl. Riem. Abb.-satzes:

$|h'(0)|$ ist maximal
 $\Rightarrow |h'(0)| = 1$.

$\Rightarrow h(z) = e^{i\varphi} \cdot z \Rightarrow h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

(Lemma v. Schwarz $\varphi \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow f = g^{-1} \circ h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. $\square$.

Uniformisierungsatz

X Riem. Fläche. $\leadsto$

$$\pi: \hat{X} \rightarrow X$$

$\uparrow$
1-zu-1

normale

Überlagerung:

$$X \cong \hat{X} / \Gamma$$

1. Fall: $\hat{X} \cong \hat{\mathbb{C}}$.

$$\Rightarrow \Gamma = \{ \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}} \}, \quad X \cong \hat{\mathbb{C}}.$$

2. Fall: $\hat{X} \cong \mathbb{C}$

$$\Rightarrow (1) \Gamma = \{ \text{id}_{\mathbb{C}} \} \Rightarrow X \cong \mathbb{C}$$

$$(2) \Gamma = \mathbb{Z}\omega \Rightarrow X \cong \mathbb{C}^*$$

$$(1) \Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \Rightarrow X \cong \mathbb{C} / \Gamma$$

complex structure

(7)

universelle Überlagerung.

Gr. Riem. Abb. Satz:

$$\hat{X} \cong \hat{\mathbb{C}} \text{ oder } \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{D}.$$

$\Gamma \subset \text{Aut}(\hat{X})$ Untergruppe
operiert frei auf $\hat{X}$.

3. Fall: $\hat{X} \cong \mathbb{D}$

$$\Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right\}$$

$$\left\{ \varphi \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{D} \right\}$$



$$X \cong \mathbb{D} / \Gamma$$

Γ nicht explizit gegeben.

angabe: $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

⑧

Fläche, kompakt

X Mannsche

$\mathbb{R}^n$

$C^1, D^1, \dots$

Garben

$\rightarrow$ Kohomologie von Garben.

$$F = \left\{ f: U \rightarrow \mathbb{K} \mid \begin{array}{l} f \text{ stetig, ldo} \dots \\ U \subset X \text{ offen} \end{array} \right\}$$

Garbe

stetig, ldo. ---

Fortsetzung zu $f: X \rightarrow \mathbb{K}$

$\uparrow$

Kohomologie von Garben.

$$U \rightarrow \mathbb{K}$$

$f: \dots$

$\cap$
 X offen

stetig

ldo.

glatt

$\vdots$