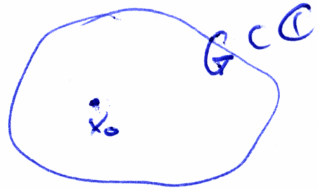
① 26.03.2020

Satz von Koebe



$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $x_0 \in G$.

$\mathcal{F} = \{ f : G \to \mathbb{C}$ holo, injektiv, $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 1 \}$

$\mathcal{F}$ kompakt, d.h. jede $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ besitzt eine Teilfolge, die kompakt glm. gegen eine Fkt. $f \in \mathcal{F}$ konvergiert.

Satz von Montel ~~$G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet.~~

Folge (f_n) von holo. Fkt'e, lokal glm. beschränkt.

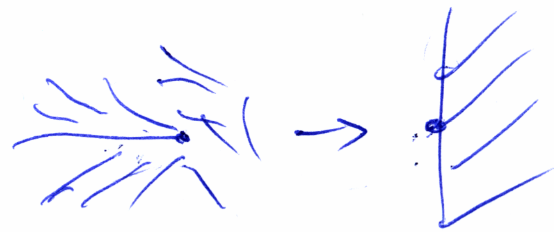
$\Rightarrow$ Es gibt Teilfolge von (f_n), die kompakt glm. gg. eine holo Fkt. konvergiert.

Lemma 1 $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, s.d. $(\mathbb{C}\setminus G)^\circ \neq \emptyset$, $f_n : \mathbb{D} \to G$; f_n besitzt kompakt glm. konv. Teilfolge.

Beweis $a \in (\mathbb{C}\setminus G)^\circ$ $\quad z \mapsto \frac{1}{z-a}$ bildet G biholo auf ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ ab.

$\square$

Lemma 2 Der Satz von Koebe gilt für $G=\mathbb{D}$.



Beweis $(f_n) \in F$.

$f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holo, injektiv, $f_n(0)=0$, $f_n'(0)=1$.

$r_n :=$ maximaler Radius, s.d. $B(0, r_n) \subset f_n[\mathbb{D}]$

$r_n > 0$.

$((r_n \leq 1))$ Beh.: $r_n < 2$.

$\hookrightarrow$ Ann.: $r_n \geq 2$, $B(0,2) \subset f_n[\mathbb{D}]$. $g(z) = f_n^{-1}(2z)$

$g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ wohldef., holo.

$g(0)=0$, $|g(z)| \leq 1$.

$\overset{\text{Lemma v. Schwarz}}{\Longrightarrow} |g(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{D}$.

$\Rightarrow |f_n^{-1}(z)| \leq \frac{1}{2}|z|$ für $z \in B(0,2)$.

$\Rightarrow |(f_n^{-1})'(0)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{|f_n'(0)| \geq 2}$. $\lightning$

Maximalität von $r_n \Rightarrow \exists a_n \in \partial B(0, r_n) \setminus f_n[\mathbb{D}]$.

$g_n := \frac{1}{a_n} \cdot f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. $\mathbb{D} \subset \underbrace{g_n[\mathbb{D}]}_{\text{1-zshgd.}}$, $1 \notin g_n[\mathbb{D}]$

$\psi_n : g_n[\mathbb{D}] \to \mathbb{C}$ holo.

$\psi_n^2(z) = z-1$, $\psi_n(0) = +i$.

$h_n := \psi_n \circ g_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holo : $\quad h_n^2 = g_n - 1 \;,\; h_n(0) = i$.

Beh: $h_n[\mathbb{D}] \cap (-h_n[\mathbb{D}]) = \emptyset$

Ann: $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, s.d. $h_n(z_1) = -h_n(z_2)$.

$$\Rightarrow g_n(z_1) = h_n^2(z_1) + 1 = h_n^2(z_2) + 1 = g_n(z_2).$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2 \;.\; \Rightarrow h_n(z_1) = 0 \;\Rightarrow g_n(z_1) = 1 \notin g_n[\mathbb{D}] \;\lightning$$

$$\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}] \;\Rightarrow\; \underbrace{\psi}_{=:U}[\mathbb{D}] \subset h_n(\mathbb{D}) \;\Rightarrow\; h_n[\mathbb{D}] \cap (-U) = \emptyset.$$

$$\Rightarrow (-U) \subset \mathbb{C} \setminus h_n[\mathbb{D}].$$

Lemma 1 $\Rightarrow (h_n)$ besitzt Teilfolge, die kompakt glm. gegen eine hol. Fkt. konvergiert.

$$\cancel{h_n = g_n^2 + 1 =} \quad f_n = a_n \cdot g_n = \underline{\underline{a_n}} \cdot \underline{(h_n^2 + 1)}$$

$$|a_n| = r_n \le 2$$

$\Rightarrow (f_n)$ bes. Teilfolge, die kompakt glm. gg. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holo.

$f(0) = 0,\; f'(0) = 1.$

f ist injektiv oder konstant.

$\downarrow$ Ja! $\qquad \downarrow$ geht nicht, weil $f'(0)=1$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{F}$.

$f: G \to \mathbb{C}$ holo. $\quad w \in \mathbb{C}$

$$\#\{z \in G \mid f(z) = w\} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\, dz$$

$\square$.

Beweis des Satzes von Koebe für bel. Gebiete:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dichte Folge in G, z.B. $G \cap \{x+iy \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$ abzählen.

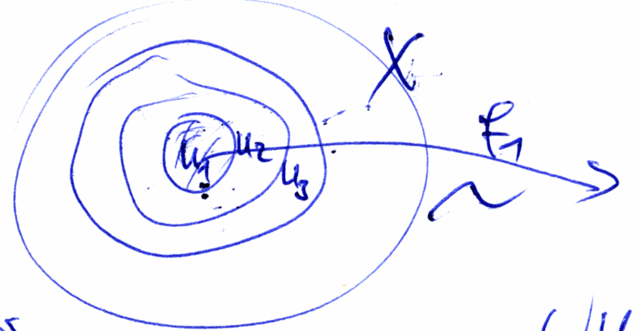
Es ex. Teilfolge (f_{n_k}), s.d. $f_{n_k}(x_m) \xrightarrow[k\to\infty]{} y_m \in \mathbb{C}$.

$$|f_{n_k}(x_m) - y_m| \le \frac{1}{k}$$

$k \ge m$.

Diese Teilfolge (f_{n_k}) konvergiert auf jedem $K \subset G$ kompakt gleichmäßig gegen ein $f: G \to \mathbb{C}$ holo., injektiv.

$\square$.



Annahme X Riem.-Fläche.

$U_k \subset X$ offen, zshgd.

$f_k : U_k \to V_k \subset \mathbb{C}$ biholo.

$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$, $\bigcup U_k = X$

"Ausschöpfung von X"

Beh: $\exists\, f : \cancel{U}X \to V \subset \mathbb{C}$ biholomorph.

Beweis $f_n \rightsquigarrow g_n(x) = a_n \cdot f_n(x) + b_n$ mit $g_n(x_0) = 0$, $\frac{dg_n}{dz}(x_0) = 1$.

$x_0 \in U_1$

z. Karte um x_0

$m \in \mathbb{N}$: $h_n = g_{m+n} \circ g_m^{-1} : \underset{\substack{\cup \\ 0}}{\overset{\substack{\mathbb{C} \\ \cup}}{g_m}}[U_m] \to V_m \subset \mathbb{C}$ holo, injektiv, $\overset{h_n}{\cancel{g_m}}(0) = 0$, $\overset{h_n'}{\cancel{g_m}}(0) = 1$.

Satz v. Koebe: h_n hat Teilfolge h_{n_k}, die kompakt glm. gegen eine inj., hol. Fkt konvergiert. auf U_m.

$$\tilde{g}_n = \begin{cases} g_n & \text{für } n \le m \\ h_{n_k} & \text{für } n > m \end{cases}.$$

$\square$

(6)

Satz Jede kompakte planare Riemannsche Fläche ist biholomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$.

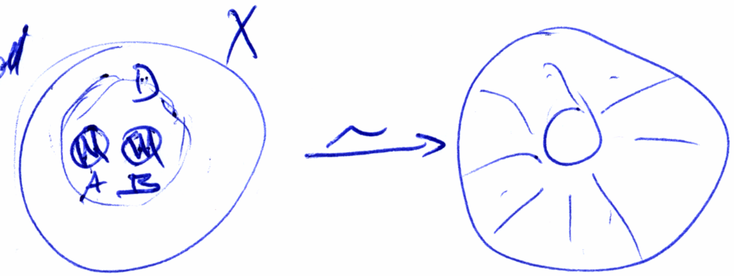
Gr. R. Abb.

$$X \underset{\text{planar}}{\cong} \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \text{kompakt} \\ \mathbb{C} & \\ \mathbb{D} & \end{cases} \Big\}\ \text{nicht kompakt.}$$

Beweis

$X \setminus \left(\overline{B(a,\tfrac{1}{n})} \cup \overline{B(b,\tfrac{1}{n})}\right) \stackrel{\text{offen, zshgd}}{=:} U_n$

biholo. äquiv. zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$.



$A = B(a,\varepsilon)$
$B = B(b,\varepsilon)$
$\Big\} \subset \mathbb{D} \cong \mathbb{D}$.

$\varepsilon = \frac{1}{n}$

Aussage $\Rightarrow$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \{a, b\}$.

ist biholo äquiv zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$.

$f : X \setminus \{a, b\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, injektiv.

Kann f in a mero. fortgesetzt werden?

a) Wenn f bei a beschränkt, dann kann f in a holomorph fortgesetzt werden.

b) f bei a unbeschränkt
f injektiv, Casorati-Weierstraß
$\Rightarrow$ Pol. bei a
1. Ordnung.
f durch ∞ meromorph fortsetzbar.

7

$\leadsto f: X \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion.

Alle Zahlen nahe bei $f(a)$ / $f(b)$ werden durch Funktionswerte von f erreicht, in der Nähe von a / b. $f(a)$

f weiterhin injektiv.

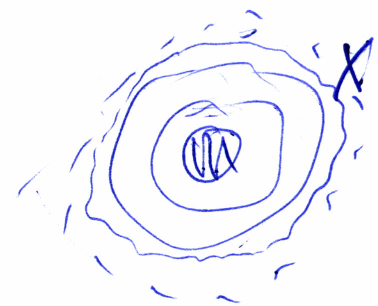
$$\left.\begin{array}{l} f[X] \;\cdot\; \text{offen} \\ \text{kompakt} \;\cdot\; \text{kompakt} \Rightarrow \text{abgeschlossen} \end{array}\right\} \Rightarrow f[X] = \hat{\mathbb{C}}.$$

$\square$.

<u>Lemma</u>

X Riemannsche Fläche.

Dann existiert eine <u>Ausschöpfung</u> $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X durch offene Mengen $\mathcal{O}_n$, mit den folgenden Eigenschaften:



$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3 \subset \ldots$

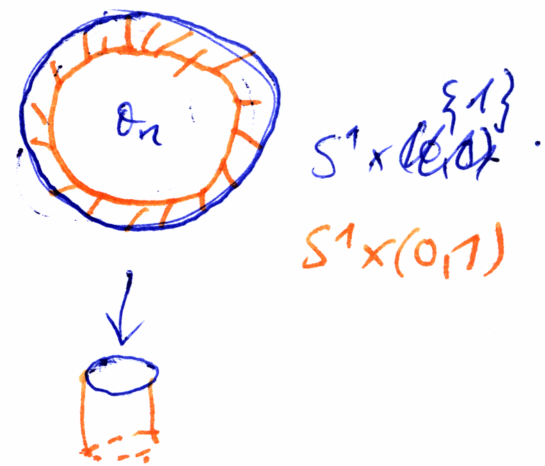
$\bigcup \mathcal{O}_n = X$

(a) $\overline{\mathcal{O}_n}$ kompakt.

$\partial\mathcal{O}_n$ besitzt einen „Kragen", d.h.

es ex. eine Umgebung B von jeder Zshangskomp. von $\partial\mathcal{O}_n$, ~~s.d. B~~ und einen Homöomorphismus,

der $B \longmapsto S^1 \times (0,1)$, $\partial\mathcal{O}_n \longleftrightarrow S^1 \times \{1\}$.



(b) $\partial\mathcal{O}_n$ besitzt in jedem Punkt eine Barriere.

9

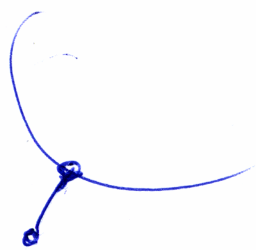
Atlas von X durch (U_n, ϕ_n), s.d.

$$\phi_n : U_n \xrightarrow{\sim} B(0, r_n) \qquad r_n > 0.$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n^{-1}[B(0, \tfrac{1}{2} r_n)] = X.$$

$$O_n = \bigcup_{k=1}^{n} \phi_k^{-1}[B(0, R_k)] \quad \left(\left(\frac{r_k}{2} < \underset{=}{R_k} < r_k\right)\right)$$

Wähle R_n so, dass $\phi_k^{-1}[\partial B(0, R_N)]$



alle $\phi_k^{-1}[\partial B(0, R_k)]$

transversal. $\square$