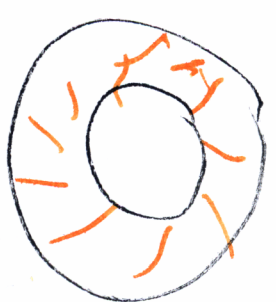


# Prucius-Satz

$X$  Riem Fläche, 1-zshg  
 $\mathbb{CP}^1$  als  $X$



bildetomorph



Prucius in  $\mathbb{C}$

Riem Fläche  $X$  heißt plauer, wenn auf  $X$  jede geschlossene  
 $1$ -Form mit kompakten Träger  $\int \omega = 0$   
 $\omega = df$  mit globaler Fkt.  $f$ .

[ $X$  plauer  $\Leftrightarrow X$  1-zshg!]

Anulus

- Satz

$X$  planare, kompakte riemannsche Fläche.

$D \subset X$  offene Teilmenge, bihol. äquiv. zu  $\mathbb{D} = B(0,1)$ .

$D \subset X$  offene Kreisscheibe,

$A, B \subset \mathbb{D}$  zwei offene Kreisscheiben,

Dann ex.  $R > 1$ , s.d.  $X \setminus (A \cup B) \cong \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$ .

$X = \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  Kreisscheiben in  $\mathbb{D}$  mit Radius  $\varepsilon > 0$ , Mittelpunkt  $a, b \in \mathbb{D}$ .

$A_\varepsilon, B_\varepsilon$

$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ .

$X_\varepsilon = X \setminus (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)$

$C = \partial B(a, \varepsilon + t)$   $t > 0$

$X_\varepsilon$  nicht planar

Lemma glatte, glatte 1-Form  $\omega$  auf  $X_\varepsilon$

$\int_C \omega \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int_C \omega \in \mathbb{Z}$  für jede geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $X_\varepsilon$ .



# Beweis

(3)

1. Schritt: Beh.  $\int_C \omega = 0 \Rightarrow \omega$  exakt.

$$\Rightarrow \int_C \omega = \int_C \omega = 0.$$

$\partial A_{\text{ext}} \subset \partial B_{\text{ext}}$

$\Rightarrow$  Es ex. glatte Funktionen  $\varphi, \psi$  die auf  $A_{\text{ext}}$  bzw.  $B_{\text{ext}}$  verschwinden, s.d.  $\omega - d\varphi - d\psi$  ~~exakt~~ auf  $B_{\text{ext}}$  verschwindet.

$\Rightarrow \omega - d\varphi - d\psi$  läßt sich in einer genll. Form auf  $X$  schreiben.  
 $\underbrace{\omega - d\varphi - d\psi}_{\text{Träger} \subset A_{\text{ext}} \cup B_{\text{ext}}} \text{ kompakt}$

$X$  paracompact  $\Rightarrow \omega - d\varphi - d\psi$  exakt  $\Rightarrow \omega$  exakt.

2. Schritt Beh. Es ex. genll. 1-Form  $\Omega$  auf  $X_{\mathbb{C}}$ , s.d.  $\int_C \Omega = 1, \int \Omega = 0, \int \Omega \in \mathbb{Z}$

$$\Omega' = \frac{1}{2a} \partial \bar{\partial} \left( \left( \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) dz \right) \text{ auf } \mathbb{D} \setminus \{a, b\}.$$

$$\partial \bar{\partial} \omega = \frac{1}{2i} (\omega - \bar{\omega})$$

$$\Rightarrow \int_C \Omega' = 1, \int \Omega' = 0.$$

$$\partial \bar{\partial} (0, t)$$



$\forall$  jeden genll.  $\gamma$  in  $X_{\mathbb{C}}$ .

Es gibt eine glatte Fkt.  $f$  auf  $X$ , s.d.  $\Omega' - d^2 f$  auf einer Umgebung von  $\partial B(0,1)$  verschwindet.  
 $\Omega =$  Fortsetzung von  $\Omega' - d^2 f$  auf  $X$ , existiert auf  $X \setminus \bar{D}$ .  
 hat's.

3. Schritt:  $w$  1-Form, geschlossen, mit  $\int_C w \in \mathbb{Z}$ .  
 1. Schritt,  $\int_C w' = 0 \Rightarrow w'$  exakt.  
 $w' = w - \left(\int_C w\right) \cdot \Omega$ .  
 exakt. 1-Form,  $\int_C w' = 0$ .

$$\int w = \int w' + \left(\int_C w\right) \cdot \int w' \quad w' \in \mathbb{Z}.$$

$$\int w = \underbrace{\int_C w}_{=0} + \underbrace{\sum_{C \in \mathbb{Z}} \int_C w}_{\in \mathbb{Z}}$$

Hodge\*-Operator:  $*$  ( $f(z)dz + g(\bar{z})d\bar{z}$ ) =  $-i f(z)dz + i g(\bar{z})d\bar{z}$

$$h: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ harmonisch} \Leftrightarrow d(*dh) = 0$$

$$h \text{ harmonisch} \Leftrightarrow f: X \rightarrow \mathbb{C}, df = dh + i * dh.$$

$$h \text{ harmonisch} \Leftrightarrow f: X \rightarrow \mathbb{C}, df = dh + i * dh.$$

$$\Rightarrow f \text{ holomorph.}$$

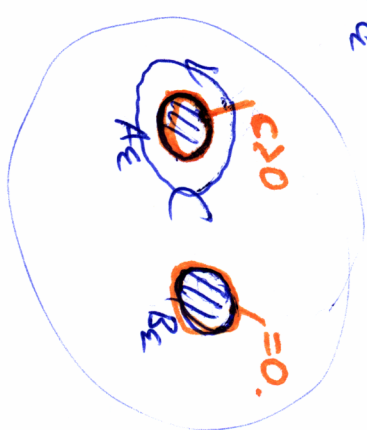
$$1\text{-Form } w \xrightarrow{q_1(z)dz + q_2(\bar{z})d\bar{z}} w \wedge w \quad 2\text{-Form} \quad g(z) \geq 0$$

$$\text{auf } U \subset \mathbb{C} \quad \underbrace{g(z) \cdot d\bar{z} \wedge dz}_{g(z) = 0 \Leftrightarrow w(z) = 0} \quad 1 \quad g(z) = 0 \Leftrightarrow w(z) = 0.$$

Beweis des Stokes-Satzes.

$\bar{X}_\varepsilon$  klein. Fläche und Rand,  $\partial \bar{X}_\varepsilon = \partial A_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon$ , kompakt

$c > 0 \Rightarrow$  Es ex. harmon. Fkt.  $h_\varepsilon : \bar{X}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$   
mit  $h_\varepsilon|_{\partial A_\varepsilon} = c$ ,  $h_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 0$ .



$$h_\varepsilon = c - h_1.$$

$$0 < \underbrace{\int_{X_\varepsilon} dh_\varepsilon \wedge *dh_\varepsilon}_{= d(h_\varepsilon \cdot *dh_\varepsilon)} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial X_\varepsilon} h_\varepsilon \cdot *dh_\varepsilon = \int_{\partial A_\varepsilon} h_\varepsilon \cdot *dh_\varepsilon + \int_{\partial B_\varepsilon} h_\varepsilon \cdot *dh_\varepsilon$$

$$= c \cdot \int_{\partial A_\varepsilon} *dh_\varepsilon = c \cdot \int_{\partial A_\varepsilon} *dh_1 = c^2 \int_{\partial A_\varepsilon} *dh_1.$$

$\Rightarrow$  Es ex. genau ein  $c > 0$ , s.d.  $\int_{\partial A_\varepsilon} *dh_\varepsilon = 1$ .  $\Rightarrow$  Lemma  $\int_{\partial A_\varepsilon} *dh_\varepsilon = 1$  für jeden geraden Weg  $\gamma$  in  $X_\varepsilon$ .

$$x_0 \in X_{\mathbb{C}}$$

$$f(x) = \exp\left(2\pi \int_{x_0}^x (d\mu + i^* d\mu)\right)$$

$$\cdot \exp(2\pi d\mu(x_0))$$

$f: X_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^*$  wohldefiniert,  
Isomorphie.

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$= e^{\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)}$$

$$2\pi (d\mu(x) - d\mu(x_0)) \cdot e^{2\pi d\mu(x_0)} = e^{2\pi d\mu(x)}$$

$$|f(x)| = e$$

Auf  $X_{\mathbb{C}}$  ist  $0 < d_{\mathbb{C}} < \infty$

$$1 < |f(x)| < e \quad 2\pi \in \mathbb{R}$$

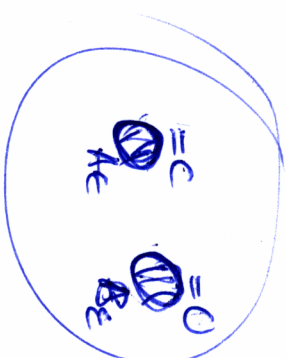
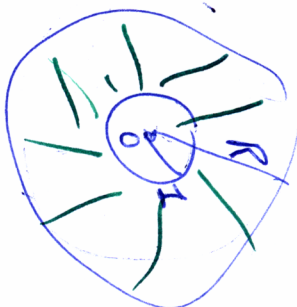
$$f[X_{\mathbb{C}}] \subset \mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$$

$$\bar{X}_{\mathbb{C}} \text{ kompakt} \Rightarrow f[\bar{X}_{\mathbb{C}}] \text{ kompakt} = \overline{f[X_{\mathbb{C}}]}$$

Wohin? Put.  $P$ ?

$$d\mu = d\mu + i^* d\mu$$

$$\exp\left(2\pi \int_{x_0}^x (d\mu + i^* d\mu)\right)$$



$f[X_{\mathbb{C}}]$  offen in  $\mathbb{C}^*$   
 $f[X_{\mathbb{C}}] = \overline{f[X_{\mathbb{C}}]} \cap \mathbb{C}^*$   
 abgeschlossen in  $\mathbb{C}^*$

$$\Rightarrow f[X_{\mathbb{C}}] = \mathbb{C}^*$$

$f: X \rightarrow M$  injektiv?

$N \subset X$  diskant, s.d.  $f|_{(X \setminus N)}$  Überlagerung.

$\left\{ \begin{array}{l} f(z) = z^n : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ n\text{-blättrige Überlagerung} \end{array} \right.$

Beh.  $f|_{(X \setminus N)}$  ist 1-blättrig ( $\Rightarrow f|_{(X \setminus N)}$  injektiv)

weil die Anzahl der Urbilder von Punkte in  $N$  unendlich wird.  
 hier, folgt, dass  $f$  injektiv.  $\Rightarrow f: X \rightarrow N$  bijektiv.

Dann

$$\int f^*(d\alpha \wedge d\bar{\alpha}) = \underbrace{\deg(f)}_{\substack{\in \mathbb{N} \\ = 1}} \int d\alpha \wedge d\bar{\alpha} = \deg(f) \cdot \underbrace{\int d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}_{\substack{\text{Blattzahl von} \\ f|_{X \setminus N} = 1}} = \deg(f) \cdot \text{Blattzahl von } f|_{X \setminus N}$$

$$\begin{aligned} a) \int_M d^2 \alpha \wedge d\bar{\alpha} &= -2\pi i \cdot \text{vol}(M) = -2i \cdot (e^{4\pi i} - 1) \\ &= -2i \cdot 2\pi i \\ &= 4\pi \end{aligned}$$



$$\text{vol} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$\begin{aligned} b) f^*(d\alpha \wedge d\bar{\alpha}) &= df \wedge d\bar{f} = H^2 \frac{d\alpha}{f} \wedge \frac{d\bar{\alpha}}{\bar{f}} \\ &= e^{4\pi i} \cdot (2\pi \cdot (d\alpha + i * d\alpha)) \wedge (2\pi (d\alpha - i * d\alpha)) \\ &= e^{4\pi i} \cdot 4\pi^2 \cdot (-2i) \cdot d\alpha \wedge * d\alpha \\ &= -2\pi i \cdot d(e^{4\pi i} \alpha) \wedge * d\alpha \\ &= -2\pi i \cdot d(e^{4\pi i} \alpha) \wedge * d\alpha \end{aligned}$$

$$f^*(dz \wedge d\bar{z}) = -2\pi i \cdot d(e^{4\pi i z} \cdot *dz)$$

(8)

$$\Rightarrow \int_{\bar{X}_2} f^*(dz \wedge d\bar{z}) = -2\pi i \cdot \int_{\bar{X}_2} d(e^{4\pi i z} \cdot *dz) \stackrel{\text{Stokes}}{=} -2\pi i \int_{\partial \bar{X}_2} e^{4\pi i z} \cdot *dz$$

$$= -2\pi i \left( \int_{\partial X_2} e^{4\pi i z} \cdot *dz + \int_{\partial B_2} e^{4\pi i z} \cdot *dz \right)$$

$$= -2\pi i \left( \underbrace{e^{4\pi i} \int_{\partial X_2} *dz}_{=1} + 1 \cdot \underbrace{\int_{\partial B_2} *dz}_{=-1} \right) = -2\pi i (e^{4\pi i} - 1)$$

$$\Rightarrow \deg(f) = 1$$

□



Korollar

$X$  klein. Fläche und Rand,  $X$  top. äquiv zu  $S^1 \times [0,1]$ .

Dann ex.  $R > 1$ , s.d.

$X^0$  (top. äquiv zu  $S^1 \times (0,1)$ ) bihol zu  $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$ .

(3)

Beweis

$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ , Erzeuger:  $C: S^1 \rightarrow S^1 \times [0,1], \varphi \mapsto (\varphi, 0)$

Für diesen  $C$  gilt Lemma 2.31

Daher überträgt sich der Beweis des Fundamentalsatzes.

□

=

Satz v. Kocher:

( $\varphi_n$ ) injektiver lok. Fkt'n

↓?

injektiv + lok. ?