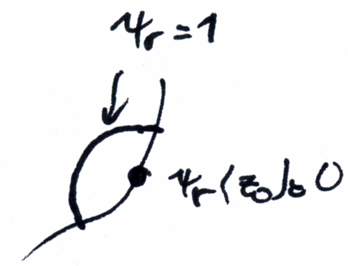
Barriere: $G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet.

$r > 0 : \psi_r : \overline{G \cap B(z_0, r)} \longrightarrow \mathbb{R}$



- $\psi_r | G \cap B(z_0, r)$ superharmonisch, $0 \le \psi_r \le 1$
- ψ_r stetig, $\psi_r(z_0) = 0$, $\psi_r | \overline{G} \cap \partial B(z_0, r) = 1$.

Satz G Dirichlet-Gebiet $\Leftrightarrow$ Jedes $z_0 \in \partial G$ hat eine Barriere.

"$\Rightarrow$" $z_0 \in \partial G$. $g : \partial G \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \dfrac{|z - z_0|}{1 + |z - z_0|}$ stetig. $0 \le g \le 1$

$\rightsquigarrow f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f | G$ harmonisch, $f | \partial G = g$. $\Rightarrow 0 \le f \le 1$.

$r > 0$ vorgegeben. $\rightsquigarrow c_r =$ min. Funktionswert von f auf $\overline{G} \cap \partial B(z_0, r)$ kompakt

$0 \le c_r \le 1$. $c_r \ne 0$. $0 < c_r \le 1$.

$\psi_r := \dfrac{1}{c_r} \cdot \min\{f, c_r\} = \min\left\{\dfrac{f}{c_r}, 1\right\}$. superharmonisch, $0 \le \psi_r \le 1$.

$(\psi_r)_{r > 0}$ Barriere in z_0.

"$\Leftarrow$"

$g : \partial G \to \mathbb{R}$ stetig gegeben.

$\rightsquigarrow$ $P(G,g)$ Perron-Familie

$\rightsquigarrow$ $f : G \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \sup\{h(z) \mid h \in P(G,g)\}$ harmonisch.

Beh. f wird durch g stetig auf ∂G fortgesetzt.

$z_0 \in \partial G$, OE $g(z_0) = 0$. $(\psi_r)_{r>0}$ Barriere in $z_0 \in G$.

$\varepsilon > 0$ vorgegeben, $\delta > 0$ so, dass $|g(z)| < \varepsilon$ für $z \in \partial G \cap B(z_0, 2\delta)$

$$\psi(z) := \begin{cases} \psi_\delta(z) & \text{für } z \in G \cap \overline{B(z_0,\delta)} \\ 1 & \text{für } z \in G \setminus \overline{B(z_0,\delta)} \end{cases}$$

ψ superharmonisch, $\psi \geq 0$. $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(z_0) = 0$.

$M := \max\limits_{\partial G} |g| \geq 0$, $< \infty$.

Beh. $-M\psi - \varepsilon \underset{Ⓐ}{\leq} f \underset{Ⓑ}{\leq} M\psi + \varepsilon$. $\quad (\Rightarrow -\varepsilon \leq f(z_0) \leq \varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} f(z_0) = 0)$

Ⓑ f harmonisch, $M\psi + \varepsilon$ superharmonisch.
$f|_{\partial G} \leq (M\psi + \varepsilon)|_{\partial G} \underset{\text{Kor. 2.16}}{\Rightarrow} f \leq M\psi + \varepsilon$.

Ⓐ $\underbrace{-M\psi - \varepsilon}_{\text{subharmonisch}} \in P(G,g)$

$z \in \partial G$: 1. Fall $z \in B(z_0,\delta)$ $\quad -M\psi(z) - \varepsilon \leq -\varepsilon \leq g(z)$

2. Fall $z \notin B(z_0,\delta)$ $\quad -M\psi(z) - \varepsilon = -M - \varepsilon \leq -M \leq g(z)$

$\square$

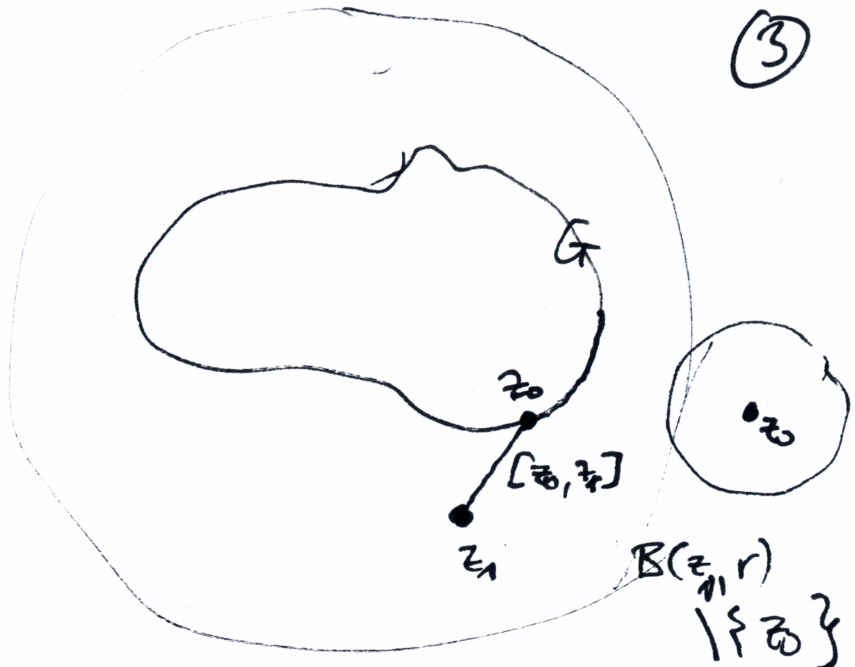
Lemma $G \subset \mathbb{C}$ beschr. Gebiet, $z_0 \in \partial G$.

Wenn es ein $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ gibt, s.d.

$$[z_0, z_1] = \{ z_0 + t(z_1 - z_0) \mid t \in [0,1] \}$$

$$[z_0, z_1] \cap \overline{G} = \{ z_0 \}.$$

dann besitzt z_0 in G eine Barriere.



Beweis

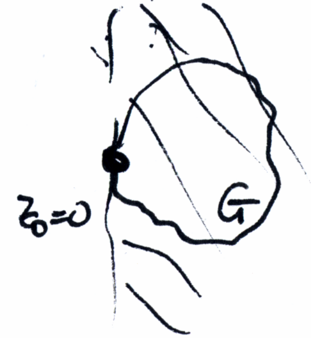
1.) Möbius trafo $z \mapsto \dfrac{z - z_0}{z - z_1}$ $\quad z_0 \mapsto 0$, $\quad z_1 \mapsto \infty$

$[z_0, z_1] \mapsto \mathbb{R}_0^- \cup \{\infty\}$.

$$\frac{z - z_0}{z - z_1} = -t \iff z - z_0 = -t(z - z_1) \iff (1+t)z = z_0 + t z_1 \iff z = \frac{z_0 + t z_1}{1+t}$$

$$= z_0 + \underbrace{\frac{t}{1+t}}_{\in [0,1)} (z_1 - z_0) \in [z_0, z_1].$$

2.) $\sqrt{\ } : \underbrace{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-}_{\text{„geschlitzte Ebene"}} \to \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \}$, $z \mapsto \sqrt{z}$ biholomorph



(4)

3.) $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ $\qquad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \longmapsto \mathbb{D} = B(0,1)$

$z = x+iy$: $\underbrace{\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1}$ $\Leftrightarrow |z-1|^2 < |z+1|^2$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2}_{\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}} + \cancel{y^2} < \underbrace{(x+1)^2}_{\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}} + \cancel{y^2} \Leftrightarrow \underset{\operatorname{Re}(z)}{\overset{\|}{x}} > 0.$

$\Updownarrow$

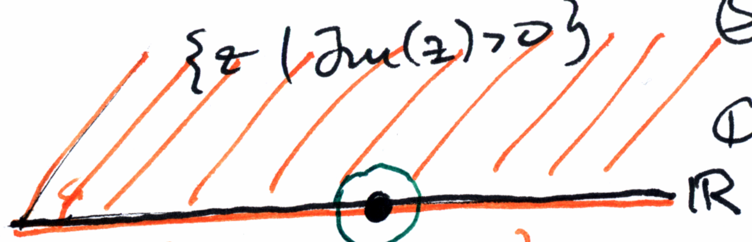
$\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{D}$

$0 \mapsto -1$

$\Rightarrow z_0$ besitzt in G eine Barriere.

$\square$.

Riemannsche Flächen mit Rand



$\mathbb{B} := \{z \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

Eine Fkt. $f : \underset{\mathbb{B}}{\underset{\cap}{U}} \to \mathbb{C}$ heißt <u>holomorph</u>,

wenn für jedes $z \in U$ ein $\tilde{U} \subset \mathbb{C}$ offen existiert,

s.d. f auf $\tilde{U}$ zu einer holomorphen Fkt. fortgesetzt werden kann.

<u>Df</u> X ein top. Raum.

(a) <u>Karte mit Rand</u> : (U, φ), $U \subset X$ offen, $\varphi : U \to \underbrace{\varphi[U]}_{\text{offen in } \mathbb{B}}$ Homöo.

(b) $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ <u>holomorph verträglich</u> : $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|\varphi_1[U_1 \cap U_2] : \underbrace{\varphi_1[U_1 \cap U_2]}_{\subset \mathbb{B}} \to \underbrace{\varphi_2[U_1 \cap U_2]}_{\subset \mathbb{B}}$.

biholomorph.

(c) holo. Atlas mit Rand, max.,

(d) <u>Riem. Fläche mit Rand</u> : holo. Atlas mit Rand,

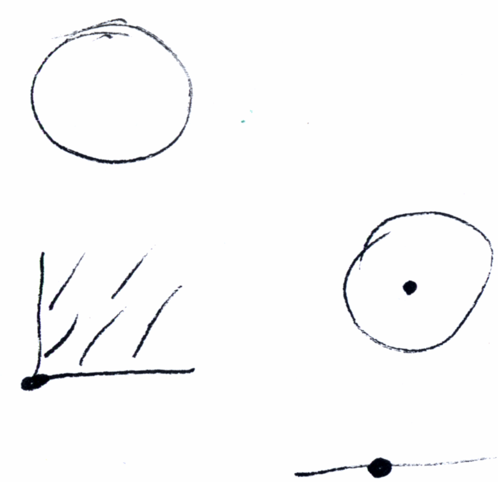
+ wegzshgd, metrisierbar, hausdorffsch, abzählbare Topologie.

X Riem. Fläche mit Rand.

$z_0 \in X$, Dann ist die Eigenschaft $\varphi(z_0) \in \partial B = \mathbb{R}$ von der Wahl der Karte ~~an~~ (U, φ) mit $z_0 \in U$ unabhängig.

Gilt diese Eigenschaft, so heißt z_0 <u>Randpunkt</u>, ∂X.

$X^\circ = X \setminus \partial X$ <u>innere Punkte</u>.



<u>Beispiele.</u> $X = \overline{B(z_0, r)}$ Riem. Fläche mit Rand

$\partial X = \partial B(z_0, r)$

$G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet

∂G glatte 1-dim. reelle Mannigfaltigk.

$\Rightarrow \overline{G}$ Riem. Fläche mit Rand.

7

Theorem X Riem. Fläche mit Rand, ∂X kompakt.

$f : \partial X \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ex. genau eine Fkt. $g : X \to \mathbb{R}$, stetig, s.d.

$g|_{X^0}$ harmonisch, $g|_{\partial X} = f$.

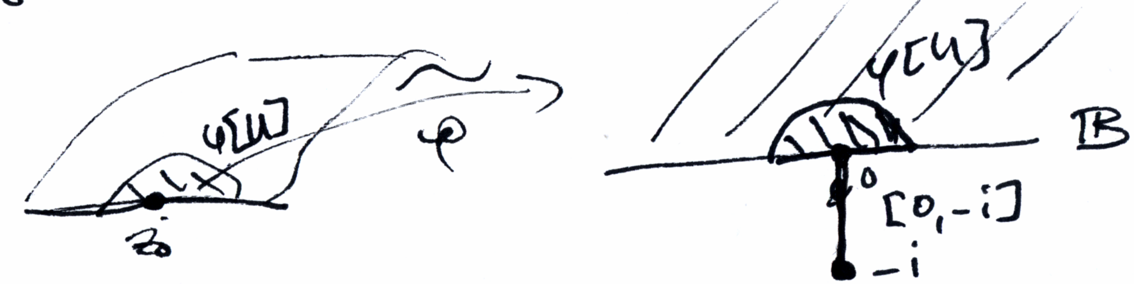
$\mathbb{C} \setminus B(z_0, r)$

Beweis $\tilde{P}(X, f) = \{ h \in P(X, f) \mid h \leq \underset{x \in \partial X}{\max} f(x) \in \mathbb{R} \}$

$\underbrace{\partial X}_{\text{kompakt}}$

$g(x) = \sup \{ h(x) \mid h \in \tilde{P}(X, f) \}$. harmonisch auf X^0.

Besitzt X in $z_0 \in \partial X$ eine Barriere?



g auf ∂X durch f stetig fortsetzbar. | Lemma $\Rightarrow$ Ja.

$\square$