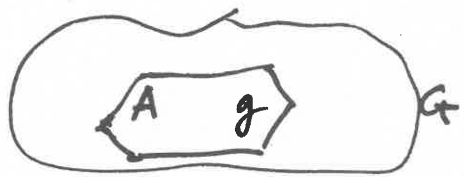
18.03.2020 ①

Aussage:

$f : G \to \mathbb{R}$ stetig

f subharmonisch $\iff$ $\forall \underset{\text{offen}}{U \subset G}$, $\forall \underset{\text{harmonisch}}{g : U \to \mathbb{R}}$: $f+g$ ist konstant oder $f+g$ nimmt auf U kein lokales Maximum an.

Korollar:



$f : G \to \mathbb{R}$ stetig.

f subharmonisch $\iff$ Für jedes kompakte $A \subset G$ und jede Fkt. $g : A \xrightarrow{\text{stetig}} \mathbb{R}$ die auf A° harmonisch ist gilt: $\left(f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A} \Rightarrow f|_A \leq g \right)$.

$f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A} \Rightarrow f|_A \leq g$

Beweis

f subharmonisch $\iff$ Für jedes g wie oben ist $\underbrace{f-g \text{ konstant}}$ oder $\underbrace{\text{nimmt kein lok. Max an auf } U = A^\circ}$

$\Rightarrow f-g \leq 0$ $\qquad f|_A \leq g$ $\qquad \square$

Korollar

Das Maximum von endlich vielen subharmonischen Funktionen ist subharmonisch.

| $f_1, \dots, f_n, \dots$
| $g_k = \max\{f_1, \dots, f_k\}$

Beweis $f_1, \dots, f_n$ subharmonisch. $f = \max\{f_1, \dots, f_n\}$

$A \subset G$ kompakt, $g : A \to \mathbb{R}$ stetig, $g|_{A^\circ}$ harmonisch.

Sei $\underbrace{f|_{\partial A}}_{\max\{f_1, \dots, f_n\}} \leq g|_{\partial A}$. $\Rightarrow f_k|_{\partial A} \leq g|_{\partial A} \underset{\text{Korollar}}{\Rightarrow} f_k|_A \leq g \Rightarrow f|_A \leq g$.

$\Rightarrow f$ subharmonisch. $\square$.

"Subharmonizität ist eine lok. Eigenschaft"

Korollar: $f : G \to \mathbb{R}$.

f subharmonisch $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{Für jedes } z \in G \text{ gibt es eine Umgebung } V \subset G, \\ \text{s.d. } f|V \text{ subharmonisch ist.} \end{cases}$

Beweis "$\Rightarrow$" ✓

Beweis

"$\Leftarrow$" Sei jeweils $f|V$ subharmonisch.

Sei $U \subset G$ offen und $g: U \to \mathbb{R}$ harmonisch. $\qquad z_0 \in V$

$W :=$ Zshangskomponente von $U \cap V$ mit $z_0 \in W$.

$\underbrace{f|W}_{(f|V)|W}$ subharmonisch, $g|W$ harmonisch.

$\underbrace{f|W + g|W}_{(f+g)|W}$ ist konstant, oder nimmt auf W kein lok. Maximum an.

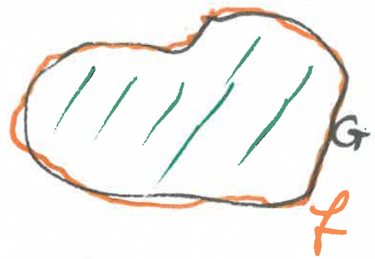
$\Rightarrow f+g$ ist (auf ganz U) konstant oder nimmt kein lok. Max an.

$\overset{\text{Auss. 2.15}}{\Longrightarrow} f$ subharmonisch. $\square$

Methode von Perron

$f_1, \dots, f_n$ subharmonisch $\Rightarrow \max\{f_1, \dots, f_n\}$ subharmonisch.

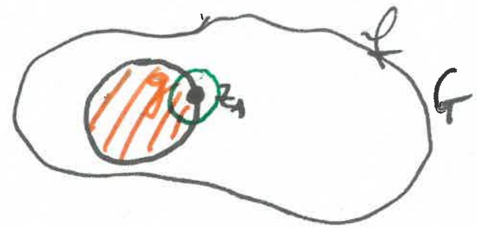
Df $G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $f: \partial G \to \mathbb{R}$ stetig.



$\underbrace{g \in P(G, f)}_{\text{Perron-Familie}} \;:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g: G \to \mathbb{R} \text{ subharmonisch} \\ \text{und für jedes } z_0 \in \partial G \text{ gelte} \\ \quad \limsup\limits_{z \to z_0} g(z) \le f(z_0) \end{array} \right.$

Satz $h: G \to \mathbb{R}$, $z \mapsto h(z) = \sup\{g(z) \mid g \in P(G, f)\} \in \mathbb{R}$.

ist harmonisch.



Lemma $f: G \to \mathbb{R}$ subharmonisch, $\overline{B(z_0, r)} \subset G$

$g: \overline{B(z_0, r)} \to \mathbb{R}$ Lsg des Dirichlet-Problems $g|_{\partial B(z_0, r)} = f|_{\partial B(z_0, r)}$.

$h: G \to \mathbb{R}$, $z \mapsto h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{für } z \in B(z_0, r) \\ f(z) & \text{für } z \in G \setminus B(z_0, r) \end{cases}$ ist subharmonisch.

Beweis

$z_1 \in \cancel{\partial G} . \ \partial B(z_0, r)$

$f|_{\overline{B(z_0,r)}} \leq g|_{\overline{B(z_0,r)}} \implies \boxed{f \leq h.}$

$\overline{B(z_1, r')} \subset G.$

$$\underline{\underline{h(z_1)}} = f(z_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_1 + r' e^{i\varphi})}_{\leq h(z_1 + r' e^{i\varphi})} \, d\varphi \leq \underline{\underline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_1 + r' e^{i\varphi}) \, d\varphi}}, \quad \square.$$

Beweis vom Satz über die Perron-Methode:

∂G kompakt, $f: \partial G \to \mathbb{R}$ stetig $\implies |f| \leq M < \infty$.

$g \in P(G, f) \implies |g| \leq M. \implies \sup \{ g(z) \mid g \in P(G, f) \} \leq M. < \infty.$

$\implies \underline{\underline{h}}$ reellwertig.

Zeige: h harmonisch in $z_0 \in G$. Idee: Satz von Harnack.

$\overline{B(z_0, r)} \subset G.$

Es ex. eine Folge (g_n) in $P(G, f)$, s.d. $g_n(z_0) \to h(z_0)$.

$\tilde{g}_n = \max\{g_1, \dots, g_n\} \in P(G, f)$.

$h_n : h_n|_{G\setminus B(z_0,r)} = \tilde{g}_n|_{G\setminus B(z_0,r)}$

$h_n|_{B(z_0,r)}$ Lsg. des Dirichlet-Problems zu $\tilde{g}_n|_{\partial B(z_0,r)}$

Lemma $\Rightarrow$ h_n subharmonisch. $\qquad h_n \in P(G,f)$

$(\tilde{g}_n)$ monoton wachsend $\Rightarrow$ (h_n) monoton wachsend.

$g_n(z_0) \le \tilde{g}_n(z_0) \le h_n(z_0) \le h(z_0)$. $\Rightarrow$ $h_n(z_0) \to h(z_0) \in \mathbb{R}$.

$\downarrow$

$h(z_0)$

Satz v. Harnack. $\Rightarrow$ (h_n) konvergiert auf $B(z_0,r)$ kompakt glm. gegen eine harmonische Funktion H. $\quad H(z_0) = h(z_0)$.

$(\Rightarrow h$ in z_0 harmonisch$)$.

Beh. $H = h|_{B(z_0,r)}$

$z_1 \in B(z_0,r)$. $\quad g_n^* \in P(G,f)$ mit $g_n^*(z_1) \to h(z_1)$!

$h_n^* : h_n^*|_{G\setminus B(z_0,r)} = \max\{g_1,\dots,g_n, g_1^*,\dots,g_n^*\}$.

$h_n^*|_{B(z_0,r)}$: Dirichlet-Problem

h_n^* subharmonisch, auf $B(z_0,r)$ harmonisch

h_n^* mon. wachsend

$h_n^*(z_0) \to h(z_0)$, $h_n^*(z_1) \to h(z_1)$!

$h_n \le h_n^*$.

7

$h_n^* \longrightarrow H^*$ ~~lokal~~ kompakt glm auf $B(z_0, r)$.

H^* harmonisch. (Satz v. Harnack)

$H \leq H^*$.

$H^*(z_0) = \underbrace{h(z_0)}_{= H(z_0)}$ $\qquad H^*(z_1) = h(z_1)$

$\underbrace{H^* - H}_{\text{harmon.}} \geq 0$, $H^* - H$ nimmt in z_0 lok. Minimum an $\Rightarrow H^* - H$ konstant.

$\Rightarrow H^* = H$.

$\Rightarrow H(z_1) = H^*(z_1) = h(z_1)$.

$\square$.

Allg. Dirichlet-Problem:

$G \subset \mathbb{C}$

Gegeben $g : \partial G \to \mathbb{R}$ stetig.

Gesucht: $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f|G$ harmonisch, $f|\partial G = g$.

G heißt Dirichlet-Gebiet, wenn auf G Dirichlet-Probleme eindeutig lösbar sind.

Idee: $g: \partial G \to \mathbb{R}$ gegeben $\rightsquigarrow \mathcal{P}(G,g)$

$f: G \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \sup\{h(z) \mid h \in \mathcal{P}(G,g)\} \in \mathbb{R}$.

↑ harmonisch. (Perron-Methode)

Frage: Ist f auf den Rand ∂G stetig fortsetzbar, und zwar durch g. ?

Def: $G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet.
Eine Barriere für G in $z_0 \in \partial G$ ist eine Familie $\{\psi_r \mid r > 0\}$ von reellen Funktionen ψ_r mit

(1) ψ_r auf $G \cap B(z_0,r)$ superharmonisch mit $0 \le \psi_r \le 1$.

(2) ψ_r stetig fortsetzbar auf $\overline{G \cap B(z_0,r)}$

$\psi_r(z_0) = 0$, $\psi_r|_{\overline{G} \cap \partial B(z_0,r)} = 1$.