

1. (a) In dieser Aufgabe muss gezeigt werden, dass M abgeschlossen und beschränkt ist. Für die Abgeschlossenheit gibt es **(1P)** und für die Beschränktheit **(2P)**.

Die Abgeschlossenheit folgt entweder mit $M = g^{-1}[\{3\}]$ aus der Stetigkeit von dem Polynom $(x, y) \mapsto g(x, y) := x^4 + \frac{1}{2}y^2$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge, oder daraus, dass der Grenzwert jeder konvergenten Folge in M auch in M liegt. Den Punkt gibt es, wenn aus den Notizen erkennbar ist, dass eines dieser Argumente benutzt wird.

Die Beschränktheit folgt daraus, dass gezeigt wird, dass beide Komponenten beschränkt sind. Dann gibt es für jede richtige obere Schranke an $|x|$ bzw. $|y|$. **(1P)**

- (b) Bei dieser Lösung werden Lagrangsche Multiplikatoren benutzt. Dann gibt es **(1P)** dafür, dass erkannt wird, dass M keine Singularitäten enthält, weil die einzige Nullstelle von ∇g gleich $(0, 0)$ ist. Diesen Punkt gibt es für die Aussage (auch ohne Begründung). **(2P)** gibt es für das Gleichungssystem

$$g(x, y) = 3, \quad \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$x^4 + \frac{1}{2}y^2 = 3, \quad 4y = \lambda 4x^3, \quad 4x = \lambda y$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich $x = \frac{1}{4}\lambda y$. Das setzen wir in die beiden ersten Gleichungen ein und erhalten

$$\left(\frac{\lambda}{4}\right)^4 y^4 + \frac{1}{2}y^2 = 3, \quad y \left(1 - \frac{\lambda^4}{4^3}y^2\right) = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt entweder $y = 0$ oder $\lambda \neq 0$ und $y^2 = \frac{4^3}{\lambda^4}$. Im ersten Fall ist wegen $x = \frac{\lambda y}{4}$ auch $x = 0$, und dieser Punkt liegt nicht in M . Im zweiten Fall setzen wir $y^2 = \frac{4^3}{\lambda^4}$ in die erste Gleichung ein und erhalten

$$3 = \frac{\lambda^4}{4^4} \frac{4^6}{\lambda^8} + \frac{4^3}{2\lambda^4} = \frac{48}{\lambda^4}.$$

Dann ist $\lambda^4 = 16$ und $\lambda = \pm 2$. Das ergibt $y^2 = 4$, also $y = \pm 2$. Setzen wir noch $x = \frac{1}{4}\lambda y$ ein so erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, \lambda_0) &= (1, 2, 2) & (x_1, y_1, \lambda_1) &= (1, -2, -2) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) &= (-1, 2, -2) & (x_3, y_3, \lambda_3) &= (-1, -2, 2) \end{aligned}$$

[(**1P**), wenn ein Kandidat ermittelt wird, (**2P**), wenn zwei oder drei Kandidaten ermittelt werden, (**3P**), wenn alle vier Kandidaten ermittelt werden (die λ_i müssen nicht ermittelt werden).]

Es gilt:

$$f(1, 2) = f(-1, -2) = 8 \quad f(1, -2) = f(-1, 2) = -8$$

(**1P**), wenn ein minimaler Funktionswert und ein maximaler Funktionswert ermittelt werden, (**2P**), wenn alle vier Funktionswerte richtig ermittelt werden.

2. (a) Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2 + 1$ (1P), wodurch $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \neq 0$ (1P) folgt. Nun gibt es (1P) dafür, dass erkannt wird, dass dadurch schon die Behauptung folgt. Dabei ist nicht entscheidend, ob der Satz von der impliziten Funktion genannt wird oder nicht.
- (b) Nach (a) gilt, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2 + 1 \underbrace{> 0}_{(2P)}$ und damit $f'(x, y) \neq 0$, die Aussage folgt (1P) (zum Beispiel aus dem Rangsatz).
3. (a) Jeweils (1P) für das richtige Einzeichnen von R bzw. S .
- (b) Fallunterscheidung (1P):
- (i) Ist $y \leq 0$ oder $1 \leq y$ so gilt sofort $\chi_S(x, y) = \chi_R(x, y) = 0$ (1P) und damit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = 0$.
- (ii) Ist $0 < y < 1$ fest, so sind $R(y) = R \cap \{(x, y) \mid \text{mit } x \in \mathbb{R}^2\} = (y, y + 1)$ (1P) und $S(y) = S \cap \{(x, y) \mid \text{mit } x \in \mathbb{R}^2\} = (y + 1, y + 2)$ (1P) jeweils Intervalle in der x -Komponente, woraus $\chi_S(x, y) = \chi_{S(y)}(x)$ und $\chi_R(x, y) = \chi_{R(y)}(x)$ folgt. Es ergibt sich $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_S(x, y) - \chi_R(x, y) dx \underbrace{= (y + 2 - (y + 1)) - (y + 1 - y)}_{(1P)} = 0$.
- Alternativ: (3P) gibt es, wenn erkannt wird, dass $R(y)$ und $S(y)$ zwei Intervalle gleicher Länge sind.
- (c) das ist eine reine Wissensfrage (bei einer richtigen Antwort gibt es (2P)):
- (i) Variante 1: f ist eine beschränkte Funktion (0P), die außerhalb der beschränkten Menge $R \cup S$ verschwindet (1P) und deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden (1P) (die 1-dimensionalen Linien, die R und S begrenzen). Das ist ein Satz aus der Vorlesung 12.15. Diese beiden Punkte gibt es, wenn diese Begründung entweder durch die Satznummer oder die Umschreibung des Satzes erkennbar ist.
- (ii) Variante 2: R und S sind offen und damit messbar (1P). Sie sind außerdem beschränkt (1P) und deshalb beide in einem endlichen Quader Q enthalten. Dann liegen mit der Treppenfunktion $\chi_Q \in L^1(\mathbb{R}^2)$ auch $\chi_R = \chi_Q \cdot \chi_R \in L^1(\mathbb{R}^2)$ und $\chi_S = \chi_Q \cdot \chi_S$ in $L^1(\mathbb{R}^2)$. Also liegt auch die Linearkombination f von $L^1(\mathbb{R}^2)$ -Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^2)$.
- (iii) Variante 3: R und S sind die Bilder der Quadern $(0, 1) \times (0, 1)$ und $(1, 2) \times (0, 1)$ unter dem (linearen) Diffeomorphismus $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen dem Jacobischen Transformationssatz liegen dann χ_R und χ_S und f in $L^1(\mathbb{R}^2)$.
- (d) Weil nun $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ können wir den Satz von Fubini anwenden und erhalten nach Aufgabenteil (b):
- $$\int f d\mu \underbrace{=}_{(1P)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \underbrace{=}_{(1P)} \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy = 0.$$
- Variante: Folgt aus (b) und (c) (1P) und Fubini (1P).
- Variante: S ist um 1 translatiertes R und deshalb gilt $\int \chi_S d\mu = \int \chi_R d\mu$. (2P)

4. (a) Die Funktion ϕ ist stetig differenzierbar, da jede Komponente stetig differenzierbar ist (**1P**).
Aufgrund der Aufgabenstellung definieren wir:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x^3 y^2 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zum Berechnen von $\phi^{-1}[M]$ berechnen wir (pro Komponente (**1P**)):

$$\begin{pmatrix} \frac{v}{u^2} \\ \frac{u^3}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3 y^2}{x^2 y^2} \\ \frac{x^3 y^3}{x^3 y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Somit sind $\phi^{-1}[M]$ und die Abbildungsvorschrift von ϕ^{-1} gegeben durch:

$$\phi^{-1}[M] = (0, 2) \times (0, 4) \text{ (1P)} \quad \phi^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{u^2} \\ \frac{u^3}{v} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsvorschrift zeigt, dass $\phi^{-1} \circ \phi = \mathbb{1}$. Man rechnet nun noch $\phi \circ \phi^{-1} = \mathbb{1}$ leicht nach (**1P**):

$$\phi \circ \phi^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} \frac{v}{u^2} \\ \frac{u^3}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{u^2} \cdot \frac{u^3}{v} \\ (\frac{v}{u^2})^3 \cdot (\frac{u^3}{v})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Jeweils (**1P**) gibt es dafür, dass erkannt wird, dass $\phi[(0, \infty) \times (0, \infty)] \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$ und dass $\phi^{-1}[(0, \infty) \times (0, \infty)] \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$ gilt. ϕ^{-1} ist damit auch stetig differenzierbar, da jede Komponente stetig differenzierbar (**1P**).

Variante zur Bijektivität:

- Injektiv: aus $\begin{pmatrix} xy \\ x^3 y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}\tilde{y} \\ \tilde{x}^3 \tilde{y}^2 \end{pmatrix}$ folgt $x = \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{y}$ und damit $\frac{\tilde{x}^3 \tilde{y}^3}{y^3} y^2 = \tilde{x}^3 \tilde{y}^2$ genau dann, wenn $\tilde{y} = y$ und damit schließlich auch $x = \tilde{x}$.
- Surjektiv: Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ gegeben,

$$\phi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} xy \\ x(xy)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow xy = u \text{ und } xu^2 = v \Leftrightarrow y = \frac{u}{x} \text{ und } x = \frac{v}{u^2}$$

woraus auch $y = \frac{u^3}{v}$ folgt. Diese Darstellung ist eindeutig (und gibt auch die Umkehrabbildung an).

- (b) Es gilt für ein $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (0, \infty) \times (0, \infty)$:

$$\phi' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 3x^2 y^2 & 2x^3 y \end{pmatrix} \implies \left| \det \phi' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = |-x^3 y^2| = x^3 y^2. \text{ (1P)}$$

Daraus folgt durch die Jacobische Transformationsformel und durch Fubini:

$$\int_M \frac{u}{v} d\mu = \int_{\phi^{-1}[M]} |\det(\phi')| f \circ \phi d\mu \underset{\text{(1P)}}{=} \int_0^2 \int_0^4 x^3 y^2 \cdot \frac{xy}{x^3 y^2} dy dx \underset{\text{(1P)}}{=} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 \underset{\text{(1P)}}{=} 16.$$

5. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} |T_g(x)| &= \left| \int_0^1 g(t)x(t)dt \right| \underbrace{\leq}_{(1P)} \int_0^1 |g(t)x(t)|dt \\ &= \int_0^1 |g(t)| \cdot |x(t)|dt \underbrace{\leq}_{(1P)} \int_0^1 |g(t)| \cdot \|x\|_\infty \underbrace{=}_{(1P)} \|x\|_\infty \int_0^1 |g(t)|dt \end{aligned}$$

(b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \frac{|g(t)|}{|g(t)| + \frac{1}{n}} \underbrace{\leq}_{(1P)} 1.$$

Es reicht, das auch ohne Supremum stehen zu haben.

(c) Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_g(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 \frac{g(t)}{|g(t)| + \frac{1}{n}} \cdot g(t) dt \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{g^2(t)}{|g(t)| + \frac{1}{n}} dt \right|.$$

Nun steht der Limes vor der Tür, warum darf er eintreten?

(i) Variante 1 (Beppo Levi): Jedes Folgenglied f_n ist in $L^1(\mathbb{R})$, da f_n stetig und damit auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ riemannintegrabel und nach dem Lebesgueskriterium auch Lebesgue-integrabel ist. Die Integrale der Funktionen $f_n(t) :=$

$$\begin{cases} \frac{g^2(t)}{|g(t)| + \frac{1}{n}} & \text{für } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1P) \text{ sind durch } \int_0^1 |g(t)|dt \text{ beschränkt } (1P). \text{ Außerdem ist}$$

die Folge f_n eine monoton wachsende Folge (1P) in $L^1(\mathbb{R})$ und die Aussage folgt.

(ii) Variante 2 (Lebesgues Satz der beschr. Konvergenz): Jedes Folgenglied f_n ist in $L^1(\mathbb{R})$, da f_n stetig und damit auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ riemannintegrabel und nach dem Lebesgueskriterium auch Lebesgue-integrabel ist. Außerdem konvergiert f_n fast überall gegen $|g|$ und $|f_n| \leq |g|$, mit $|g| \in L^1(\mathbb{R})$, da $|g|$ stetig und damit wieder Riemannintbar und damit wieder Lebesgueintbar ist.

(iii) Variante 3: Gleichmäßige Konvergenz: Es gilt

$$\left| \frac{g^2(t)}{|g(t)| + \frac{1}{n}} - |g(t)| \right| = \frac{|g^2(t) - g^2(t) - \frac{1}{n}|g(t)||}{|g(t)| + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{|g(t)|}{|g(t)| + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}$$

Daher konvergiert die Funktionenfolge $(\frac{g^2(t)}{|g(t)| + \frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $|g(t)|$.

Im Falle einer richtigen Begründung gibt es (3P). In jedem Fall darf also der Limes mit dem Integral vertauscht werden und es ergibt sich schließlich die Behauptung.

(d) Wegen (a) gilt

$$\|T_g\| \leq \int_0^1 |g(t)|dt \quad (1P).$$

Wegen (b) gilt

$$\|T_g\| \geq |T_g(x_n)| \quad (1P).$$

Dann folgt aus (c) auch (d):

$$\int_0^1 |g(t)|dt \geq \|T_g\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |T_g(x_n)| = \int_0^1 |g(t)|dt \quad (1P).$$