Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II
Abschlußklausur

15. Juni 2020

- Unterschreiben Sie bitte Ihre Klausur hier: ____________________________
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Prüfen Sie Ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen ab der ersten Aufgabe unten auf den Vorderseiten die Seitenzahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 und 13 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, Rotstift oder radierbaren Kugelschreiber/Tintenroller zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich* und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Ihre Handys schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe		mgl. Punkte	erreichte Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1	(a)	3		
	(b)	8		
2	(a)	3		
	(b)	3		
3	(a)	2		**Note:**
	(b)	5		
	(c)	2		
	(d)	2		
4	(a)	8		
	(b)	4		
5	(a)	3		
	(b)	1		
	(c)	3		
	(d)	3		

1. Extremwertsuche.

(a) Zeige, dass die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + \tfrac{1}{2}y^2 = 3\}$$

kompakt ist. *(3 Punkte)*

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 4xy$$

hat als stetige Funktion auf der kompakten Menge M mindestens ein Maximum und mindestens ein Minimum. Bestimme die Koordinaten und die Funktionswerte von allen Maxima und Minima.

(8 Punkte)

---

2. Auflösen von Gleichungen.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^3 + xy^2 + x - y$.

(a) Zeige, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mit $f(0, 0) = 0$ lokal nach x auflösbar ist, dass es also eine Funktion $g(y)$ gibt, so dass diese Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ durch $(x, y) = (g(y), y)$ gelöst wird.

(3 Punkte)

(b) Zeige, dass für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ folgende Niveaumenge keine Singularitäten hat: $M_{(x_0,y_0)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$.

(3 Punkte)

---

3. Gestreift

[Beachte, dass die Aufgabenteile unabhängig voneinander gelöst werden können, wenn Sie bei (d) die Aussagen von (b) und (c) verwenden.]

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f := \chi_S - \chi_R$ mit folgenden Mengen

$$R := \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \mid y < x < y + 1 \text{ und } y < 1\},$$
$$S := \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \mid y + 1 < x < y + 2 \text{ und } y < 1\}.$$

(a) Zeichne R und S in ein gemeinsames Koordinatensystem *(2 Punkte)*

(b) Zeige, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = 0$. *(5 Punkte)*

(c) Begründe, warum f in $L^1(\mathbb{R}^2)$ liegt. *(2 Punkte)*

(d) Zeige, dass $\int f d\mu = 0$. *(2 Punkte)*

4. Jacobi Transformation

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in (0,\infty) \times (0,\infty) \;\middle|\; 0 < \frac{v}{u^2} < 2 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{u^3}{v} < 4 \right\}$

(a) Zeige, dass die Abbildungsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x^3 y^2 \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare und bijektive Abbildung $\phi : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)\times(0,\infty)$ definiert. Bestimme die Umkehrabbildung ϕ^{-1} und zeige, dass diese auch stetig differenzierbar ist und bestimme außerdem $\phi^{-1}[M]$. *(8 Punkte)*

(b) Berechne das Integral $\int_M \frac{u}{v} \,\mathrm{d}\mu$. *(4 Punkte)*

5. Normierte Räume

[*Beachte:* Die Aufgabenteile (a)–(d) können unabhängig voneinander gelöst werden!]
Sei A der Banachraum der stetigen, beschränkten, reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Außerdem sei T_g für ein $g \in A$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T_g : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto T_g(x) = \int_0^1 x(t)g(t)dt. \end{aligned}$$

(a) Zeige für alle $x \in A$ die Ungleichung:

$$|T_g(x)| \leq \|x\|_\infty \int_0^1 |g(t)|dt.$$

(3 Punkte)

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei x_n folgendes Element von A:

$$x_n(t) = \frac{g(t)}{|g(t)| + \frac{1}{n}},$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|x_n\|_\infty \leq 1$. *(1 Punkt)*

(c) Zeige, $\lim_{n\to\infty} |T_g(x_n)| = \int_0^1 |g(t)|dt$. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Der Beweis ist mit Lebesgue'scher Integrationstheorie einfacher]

(d) Folgere aus (a), (b) und (c), $\|T_g\| = \int_0^1 |g(t)|dt$. *(3 Punkte)*
