

Zusatzaufgaben

1. Anschauliche lineare Operatoren.

- (a) Finde einen linearen Operator
- $A_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- , der die Spiegelung eines Punktes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

an der x -Achse darstellt.

- (b) Finde eine Matrix
- $A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
- , so dass das Bild der linearen Abbildung

$$A_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

die Ebene in \mathbb{R}^3 beschreibt, die durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

2. Die Menge der linearen invertierbaren Abbildungen von \mathbb{K}^n nach \mathbb{K}^n .

Sei

$$M := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \mid \exists B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) : AB = BA = \mathbf{1}\}.$$

- (a) Zeige, dass
- M
- offen in
- $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$
- ist.

Hinweis: Benutze, dass für $A \in M$ gilt, dass $A + B = A(\mathbf{1} + A^{-1}B)$ gilt und verwende die Neumannsche Reihe.

3. Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit.

- (a) Für welche Punkte
- $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
- sind die durch

$$(i) f_1(x) = |x_1 x_2| + |x_3| \qquad (ii) f_2(x) = |x_1 x_2 x_3|^{1/3}$$

definierten Funktionen $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar bzw. differenzierbar?

- (b) Sei
- $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- . Prüfe, ob
- $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- in
- $x_0 = 0$
- differenzierbar ist.

- (c) Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 - 2y^2$$

im Punkt $(1, 2)$ in Richtung eines Vektors, der mit der positiven x -Achse einen Winkel von $\pi/4$ bildet.