

Zusatzaufgaben

1. Gaußscher Satz.

(a) Berechne $\int_{\partial Z} v \cdot n \, d\sigma$ für das Zylindergebiet

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 5, x^2 + y^2 < 9\}$$

und das Vektorfeld $v(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$. Hierbei darf verwendet werden, dass der Gaußsche Satz auch für Gebiete mit stückweisem C^2 -Rand gilt.

(b) Seien $a, b, c > 0$ und

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Berechne

$$\int_{\partial E} u \cdot N \, d\sigma$$

für das Vektorfeld $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z)^T \mapsto (x, y, z)^T$.

2. Nochmal mehrdimensionale Integration.

Sei $B^3(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ der Ball um den Ursprung in \mathbb{R}^3 mit Radius $R > 0$ und $S^2 = \partial B^3(0, 1)$.

(a) Berechne das Volumen von $B^3(0, R)$,

(b) Berechne das Integral $\int_{B^3(0, R)} \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \, d\mu$.

(c) Berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Integral

$$\int_{S^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + y + z \right) \, d\mu$$

Tipp: Verwende, falls notwendig, die Kugelkoordinaten $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ mit Radius $r > 0$ und Winkeln $\theta \in [0, \pi]$ sowie $\varphi \in [0, 2\pi]$.

3. Berechnung von Flächeninhalten mit dem Satz von Gauß.

Zeigen Sie, dass das elliptische Paraboloid

$$P = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, x, y \in [-1, 1]\}$$

und das Hyperboloid

$$H = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = z, x, y \in [-1, 1]\}$$

als Flächen im \mathbb{R}^3 den gleichen Flächeninhalt besitzen. Wieder darf verwendet werden, dass der Gaußsche Satz auch für Gebiete mit stückweisem C^2 -Rand gilt.

Tipp: Es ist nicht nach dem konkreten Inhalt der Flächen gefragt.