Zusatzaufgaben

1. Jacobische Integrationsformel.

(a) Wir betrachten die Parametertransformation

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (t,s) \mapsto (x,y) \text{ mit } x = \tfrac{1}{3}(t+s) \text{ und } y = \tfrac{1}{3}(2t-s)$$

sowie das Integrationsgebiet

$$O := \{\, \Phi(t,s) \,|\, 0 < t < 1 \text{ und } 0 < s < 1 \,\} .$$

Berechne durch Anwendung der Jacobischen Transformationsformel für die Transformation Φ das Integral

$$\int_O (x+y)^{2011} \cdot \exp(2x-y)\, \mathrm{d}\mu .$$

Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel erfüllt sind.

(b) Gegeben sei die *Spirale des Archimedes*, welche durch die Kurve der Abbildung

$$f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto f(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (\varphi\cos(\varphi), \varphi\sin(\varphi))$$

beschrieben wird.
Sei O die offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, welche von der Kurve von $f|_{[0,\pi]}$ und $f|_{[2\pi,3\pi]}$ sowie $y = 0$ begrenzt wird und die in der Skizze auf der nächsten Seite grau dargestellt wird.
Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi), \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

bildet die Menge

$$U := \{(\varphi, r) \,|\, \varphi \in (0,\pi),\ \varphi < r < \varphi + 2\pi\}$$

bijektiv auf O ab.

(i) *Skizziere* die Menge U und *bestimme* auf welche Teile des Randes von O die Kanten von U durch Φ abgebildet werden.

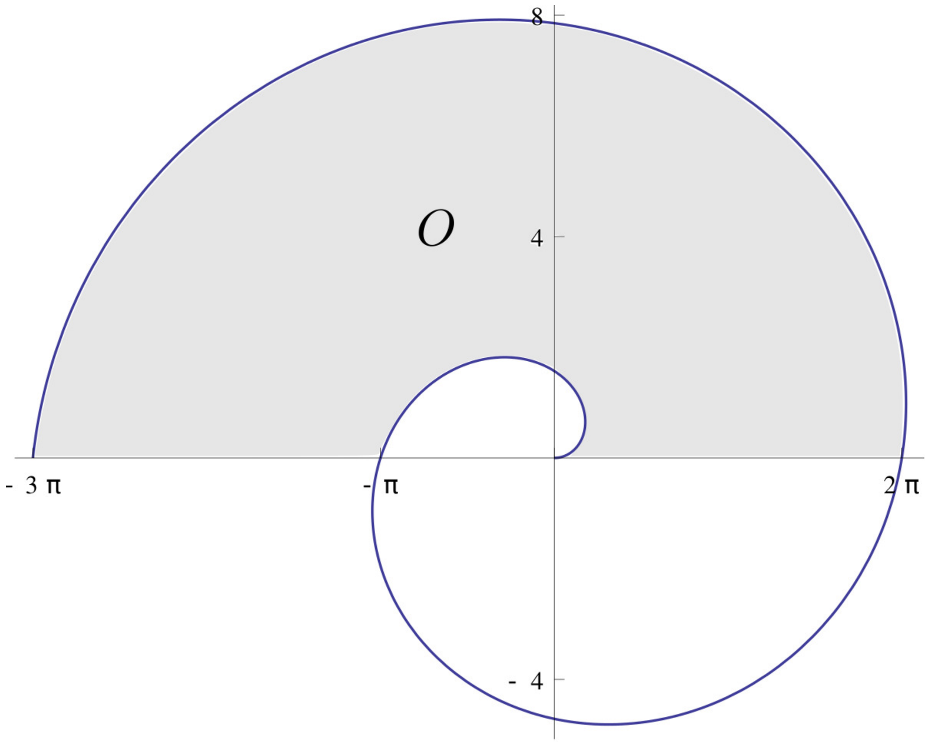
(ii) *Bestimme* den Flächeninhalt von O. Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Sätze, die angewandt werden, erfüllt sind.

2. Lesbegue-Theorie.

Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Zeige*:

$$\lim_{r \to 0+} \int_{[0,r]} f \,\mathrm{d}\mu = 0 .$$

Tipp: Es genügt zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $r_n > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,r_n]} f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Dies kann mit Hilfe von Lesbegue's Satz der beschränkten Konvergenz gezeigt werden.


8
4
O
- 4
- 3 π
- π
2 π