Zusatzaufgaben

1. Der Satz von Fubini.

Sei

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0,\, x + y < 1\}$$

und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} e^{x+y} & \text{für } (x,y) \in M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Begründe, dass $f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. und berechne $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mu$ mit Hilfe des Satzes von Fubini.

2. Treppenfunktionen.

Sei $V := C([-1,1])$ und $\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)| \, dx$. Zeige, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \in [-1, -\frac{1}{k}] \\ kx & \text{falls } x \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \\ 1 & \text{falls } x \in [\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$$

bezüglich der von obiger Norm induzierten Metrik eine Cauchyfolge ist, die aber in V (bezüglich dieser Metrik) keinen Grenzwert hat. Gebe einen Grenzwert im Raum $L^1([-1,1])$ an.

3. Vertauschen von Grenzprozessen.

(a) Warum existieren die folgenden Grenzwerte und was ist ihr Wert?

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sqrt[n]{\sin(\chi_{[0,\pi]})} \, d\mu$ **(ii)** $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^n (\chi_{[0,1]}) \, d\mu$

(b) Gebe eine Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Treppenfunktionen $g_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ an, welche die folgende Eigenschaft hat:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0,$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu = \infty,$$

Welche Voraussetzung des Satzes von Beppo Levi ist verletzt?