Zusatzaufgaben

1. Nullmengen.

(a) Zeige:

(i) $M_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ ist keine Nullmenge.

(ii) $M_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ ist eine Nullmenge.

(iii) $M_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\}$ ist eine Nullmenge.

(iv) $M_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1\}$ ist keine Nullmenge.

(v) $M_5 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ ist eine Nullmenge.

[*Tipp:* Für einige der Aufgaben könnt ihr die Aufgabe 34 vom aktuellen Zettel benutzen.]

(b) Ist der Rand einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit der Standardmetrik) immer eine Nullmenge?

(c) Zeige mit Hilfe der bekannten Aussagen über Nullmengen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

2. Lebegue-Integrierbarkeit.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \in (0,\infty), \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

zwar uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Es sei $q \in (0,1)$, $I_n := \left[n, n+\frac{q^n}{n}\right]$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n, \text{ falls } x \in I_n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0, \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n. \end{cases}$$

Zeige, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ und bestimme $\int f\, d\mu$.