Zusatzaufgaben

1. Kugelkoordinaten.

Berechne die Jacobi-Matrix und die Determinante der Jacobi-Matrix der durch

$$v(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

definierten Abbildung $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. In welchen Punkten (r,θ,φ) ist die Jacobimatrix regulär? Zwischen welchen Teilmengen Urbild- und Bild- bereich sind diese Abbildungen jeweils bijektiv?

2. Extremwerte unter Nebenbedingungen.

(a) Prüfe, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \exp(x+y)$$

unter der Nebenbedingung $xy = 0$ lokale Extremwerte besitzt besitzt und bestimme diese gegebenenfalls.

(b) Bestimme die Maxima und Minimima des Polynoms

$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Kreisscheibe $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(*Hinweis:* Berechne zunächst die lokalen Extrema von f im Innern von K und dann auf dem Rand von K, d.h. unter der Gleichungsnebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.)

(c) Zerlege die reelle Zahl $a > 0$ so in drei positive Summanden, dass deren Produkt maximal ist.

(d) Bestimme mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus den euklidischen Abstand des Punktes $x^* := (1,-1,0)^T \in \mathbb{R}^3$ zum Rotationshyperboloid

$$M := \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$