Zusatzaufgaben

1. Mehrdimensionales Ableiten.

(a) Bestimme die Extrema der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:

(i) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 + 27$, (ii) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 1$.

(b) Berechne das Taylor-Polynom um zweiter Ordnung um $(x, y) = (1, 1)$ von

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}.$$

2. Satz der inversen und Satz der impliziten Funktion.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ \exp(y) \end{pmatrix}$.

(i) Zeige, dass f in jedem Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lokal umkehrbar ist.

(ii) Berechne $\left(f^{-1}\right)' \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(1) \end{pmatrix}$.

(b) Bestimme alle Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, in denen die Gleichung

$$\exp(y) + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$$

lokal in der Form $y = g(x)$ auflösbar ist.

3. Zum Banachschen Fixpunktsatz.

Betrachte die folgenden Abbildungen in $\mathbb{R}$. Überprüfe die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes und untersuche die Abbildungen hinsichtlich der Existenz von Fixpunkten.

(a) $f : M \to M$ mit $M = (0, 1)$ und $f(x) = \frac{x}{2}$,

(b) $f : M \to M$ mit $M = \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$,

(c) $f : M \to N$ mit $M = [0, 1]$ und $N = [2, 3]$,

(d) $f : M \to M$ mit $M = [-1, 1]$ und $f(x) = \frac{e^x}{3}$.