Zusatzaufgaben

1. Richtungsableitungen, kritische Punkte und Gradient.

(a) Berechne die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^3 + e^y \cdot \sin(z)$$

an der Stelle $x_0 = (1, \log 3, \frac{\pi}{3})$ in Richtung $v = (3, -2, 6)$.

(b) Berechne den Gradienten und bestimme alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - x,$

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz.$

2. Richtungsableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in jede Richtung differenzierbar ist und berechne die zugehörige Richtungsableitung.

(b) Zeige, dass f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht differenzierbar ist.

3. Ableitung von Potenzreihen.

Sei X ein Banachraum und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $\rho > 0$. Zeige, dass die Abbildung

$$f : B(0, \rho)_{\mathcal{L}(X)} \to \mathcal{L}(X),\ A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, A^n$$

in $0 \in \mathcal{L}(X)$ differenzierbar ist und berechne $f'(0)$. Hierbei bezeichnet $B(0, \rho)_{\mathcal{L}(X)}$ den Ball vom Radius ρ um 0 in $\mathcal{L}(X)$.

Tipp: Es ist nicht schwer, die „lineare Approximation“ von f an der Stelle $A = 0$ zu raten. Außerdem beachte man, dass die reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}|\, x^n$ ebenfalls den Konvergenzradius ρ besitzt.