

1. Stetigkeit. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Betrachte den metrischen Raum (Y, d)

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 2, 1 \leq |y| \leq 2\}.$$

als metrischen Unterraum von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$

(a) Zeige, dass Y kompakt ist.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$$

gleichmäßig stetig ist.

2. Die Menge der linearen invertierbaren Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$.

Sei

$$M := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \mid \exists B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) : AB = BA = \mathbb{1}\}.$$

(a) Zeige, dass M offen in $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist.

Hinweis: Benutze, dass für $A \in M$ gilt, dass $A + B = A(\mathbb{1} + A^{-1}B)$ gilt und verwende die Neumannsche Reihe.

(b) Zeige, dass M dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist.

Hinweis: Betrachte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda \mathbb{1} - A)$.

3. Wiederholung zur linearen Algebra.

Gegeben seien zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume V und W . Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und sei $f : V \rightarrow W$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die n Vektoren $w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)$ aus W (vgl. lineare Algebra). Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) f ist injektiv $\iff w_1, \dots, w_n$ sind linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$.

(b) f ist surjektiv $\iff w_1, \dots, w_n$ bilden ein Erzeugendensystem von W .