Prof. Dr. Martin Schmidt | | Analysis II
Volker Eing | **Zusatzaufgaben** | Woche 3

1. Äquivalente Normen.
Es sei V ein normierter Vektorraum und $\|\cdot\|_a : V \to \mathbb{R}$ sowie $\|\cdot\|_b : V \to \mathbb{R}$ zwei zueinander äquivalente Normen auf V. Sei außerdem $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in V, die in der Norm $\|\cdot\|_a$ gegen ein $z \in V$ konvergiert. Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in der Norm $\|\cdot\|_b$ konvergiert.

2. Funktionenfolgen.

Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : X \to X'$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f : X \to X'$ konvergiert. Zeige:

(a) Ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, so ist auch f beschränkt.

(b) Ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig, so ist auch f stetig (siehe Beweis in Analysis I).

3. Stetigkeit.
Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^m$, d.h. für $x = (x_1, \ldots, x_m)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

(a) Zeige, dass die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$$

stetig ist.

(b) Gebe unstetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an, für die h trotzdem stetig ist.