Prof. Dr. Martin Schmidt
Volker Eing

Zusatzaufgaben

1. Metrik und Norm.

(a) Sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ und für $x, y \in \mathbb{R}^2$ definiere man

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2, & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden durch den Ursprung liegen,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Warum wird diese Metrik auch mit Metrik der französischen Eisenbahn bezeichnet?

(b) Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$, das heißt

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Zeige, dass $\mathbb{R}[x]$ ein Vektorraum ist.

(ii) Für $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ definiere man $\|p\| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Zeige, dass durch $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}[x]$ definiert ist.

2. Metriken.

(a) Man *beweise* oder *widerlege*, dass durch

$$d(x,y) := (x-y)^2$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(b) *Zeige*, dass durch die Einschränkung der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ auf die Vereinigung der Inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ wegen

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

eine Metrik auf $\overline{\mathbb{N}}$ gegeben ist durch

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm},\ d(n,\infty) = d(\infty,n) = \frac{1}{n},\ d(\infty,\infty) = 0.$$