Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Abschlußklausur

19. Juni 2017

Bevor Sie beginnen beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen ab der ersten Aufgabe unten die Seitenzahlen 1–14 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, Rotstift oder radierbaren Kugelschreiber/Tintenroller zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich* und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe		mgl. Punkte	erreichte Punkte
1	(a)	3	
	(b)	3	
2		13	
3	(a)	6	
	(b)	3	
4	(a)	2	
	(b)	6	
5	(a)	9	
	(b)	5	

Gesamtpunktzahl:

Note:

1. Differenzierbare Abbildungen.

Sei $f : V \to W$ eine Abbildung zwischen normierten Vektorräumen $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$, die $f(tx) = tf(x)$ für alle $x \in V$ und alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(a) Zeige, dass $f(x)$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung von f an der Stelle 0 in Richtung x ist. *(3 Punkte)*

(b) Sei f zudem differenzierbar bei $x = 0$. *Zeige*, dass f eine stetige, lineare Abbildung ist.

(3 Punkte)

---

2. Extremwertsuche.

Seien E und S die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0\} \quad \text{und} \quad S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

und sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x.$$

Begründe, warum f auf der Menge $S \cap E$ ein Maximum und ein Minimum annimmt und bestimme das Maximum und das Minimum von $f|_{S\cap E}$. *(13 Punkte)*

---

3. Auflösen von Gleichungen.

Betrachte

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (x, y, z) \mapsto \cos(x) + xy + \exp(-z^2).$$

(a) *Entscheide* jeweils, ob die Voraussetzungen des Satzes der impliziten Funktion erfüllt sind, so dass die Lösungen der Gleichung $f(x, y, z) = 1 + \exp(-1)$ in einer Umgebung des Punktes $(0, 1, -1)$ als

(i) $(x, y, z) = (g_1(y, z), y, z)$,

(ii) $(x, y, z) = (x, g_2(x, z), z)$,

(iii) $(x, y, z) = (x, y, g_3(x, y))$

mit stetig differenzierbaren Funktionen g_1 bzw. g_2, bzw. g_3 geschrieben werden können.

(6 Punkte)

(b) Sei $M_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$. *Bestimme*, für welche c die Niveaumenge M_c singuläre Punkte enthält. *(3 Punkte)*

---

4. Lebesgueintegral.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \chi_{[\frac{1}{n},1]}(x).$$

(a) *Zeige* $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass der punktweise Grenzwert f von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R})$ liegt und *bestimme* das Integral $\int f \, d\mu$. *(6 Punkte)*

5. Mehrdimensionale Integration.

Sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0,\ x + y < 1\}$$

und

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)) = (uv, (1 - v)u).$$

(a) *Zeige*, dass Φ eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung von $(0, 1)^2$ nach M definiert.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $\Phi[(0, 1)^2] \subseteq M$ und dass es eine Abbildung Ψ gibt, so dass $\Psi[M] \subseteq (0, 1)^2$ mit $\Phi \circ \Psi[M] = \mathbb{1}_M$ und $\Psi \circ \Phi[(0, 1)^2] = \mathbb{1}_{(0,1)^2}$.

(9 Punkte)

(b) Sei zudem $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ in $L^1((0, 1))$. *Zeige*, dass gilt

$$\int_M f(x + y)\, d\mu = \int_{(0,1)} f(u)u\, d\mu(u).$$

(5 Punkte)
