Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Abschlußklausur

2. September 2017

Bevor Sie beginnen beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen ab der ersten Aufgabe unten die Seitenzahlen 1–14 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, Rotstift oder radierbaren Kugelschreiber/Tintenroller zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich* und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe		mgl. Punkte	erreichte Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1	(a)	3		
	(b)	4		
2	(a)	2		
	(b)	6		
3	(a)	6		**Note:**
	(b)	9		
4		7		
5	(a)	6		
	(b)	7		

1. Differenzierbarkeit in mehreren Veränderlichen.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Diese ist an der Stelle $(0,0)$ in jede Richtung $(v,w) \neq (0,0)$ differenzierbar.

(a) *Zeige*, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt, dass $f(x,y)$ gleich der Richtungsableitung von f an der Stelle $(0,0)$ in Richtung (x,y) ist. *(3 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege*: f ist an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar. *(4 Punkte)*

---

2. Metrische Räume.

Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine nicht-leere, kompakte Teilmenge. Betrachte die Abbildung

$$\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, z) \mid z \in A\}.$$

(a) *Begründe*, warum für jedes $x \in X$ ein $b \in A$ existiert mit $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, b)$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige* $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$ für $x, y \in X$. *(6 Punkte)*
Tipp: Zeige zuerst $\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, y) + \operatorname{dist}(y, A)$ für $x, y \in X$.

---

3. Extremwertsuche.

(a) Zeige, dass die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^4 = x^3 - x^4\}$$

kompakt ist. *(6 Punkte)*

Tipp: Zeige zunächst, dass $|x| \leq 1$ für alle $(x, y) \in M$ gilt.

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x$$

hat als stetige Funktion auf der kompakten Menge M ein Maximum und ein Minimum. Bestimme diese. *(9 Punkte)*

---

4. Auflösen von Gleichungen.

Zeige, dass es eine differenzierbare Funktion φ mit $\varphi(1) = 0$ gibt, so dass die Lösung der Gleichung

$$2\sin(x) + e^{\sin(xy)} = x + y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ durch $(x, y) = (\varphi(y), y)$ beschrieben wird. *Bestimme* zudem das Taylorpolynom erster Ordnung von φ um den Entwicklungspunkt $y_0 = 1$.

(7 Punkte)

---

5. Mehrdimensionale Integration.

Sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < x + 2 \text{ und } 0 < x + y < 4\}$$

(a) *Zeige*, dass $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto (u - v, u + v)$ eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung ist, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist. *Bestimme* zudem $\Phi^{-1}[M]$. *(6 Punkte)*

(b) *Berechne* das Integral $\int_M (x + y)\, d\mu$. *(7 Punkte)*
