Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
Abschlußklausur, 2. Termin

26. August 2014

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bevor Sie beginnen beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 100.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–12 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, Rotstift oder radierbaren Kugelschreiber/Tintenroller zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich* und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe		mgl. Punkte	erreichte Punkte	Aufgabe		mgl. Punkte	erreichte Punkte
1	(a)	6		4	(a)	6	
	(b)	5			(b)	19	
	(c)	5		5	(a)	6	
2	(a)	18			(b)	4	
	(b)	5			(c)	10	
3	(a)	5		**Gesamtpunktzahl:**			
	(b)	5					
	(c)	6					

1. Differentialrechnung.

Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|xy$$

in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf

(a) partielle Differenzierbarkeit, *(8 Punkte)*

(b) totale Differenzierbarkeit. *(12 Punkte)*

(*Tipp:* In manchen Fällen folgt aus der Antwort auf (a) die Antwort auf (b) und in anderen Fällen andersrum. Deshalb lohnt es sich zu überlegen, was man zuerst zeigt.)

2. Extremwerte.

Begründe die Existenz von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf der Menge

$$E := \{(x, y) \mid g(x, y) := 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16\}$$

mit minimalem und maximalem euklidischen Abstand zum Ursprung $(0, 0)$ und *bestimme* diese Abstände. *(23 Punkte)*

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass E beschränkt ist.

(*Tipp:* Bestimme die Extrema des Quadrats des euklidischen Abstands.)

3. Auflösen von Gleichungen.

(a) *Zeige* mit Hilfe des Satzes der impliziten Funktion, dass sich die Gleichung

$$\cos(x+y) - xy = 1 + \frac{\pi^2}{16}$$

in einer Umgebung des Punktes $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}^2$ nach $x = g(y)$ auflösen läßt mit einer differenzierbaren Funktion g und $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$. Dabei soll auch *überprüft* werden, ob alle Voraussetzungen des Satzes der impliziten Funktion erfüllt sind. *(6 Punkte)*

(b) *Bestimme* die Ableitung von g an $y_0 = -\frac{\pi}{4}$ und *begründe* die Herleitung der Ableitung. *(10 Punkte)*

---

4. Banachräume.

Sei X ein Banachraum und $f : X \to X$ Lipschitz-stetig mit $L < 1$.

(a) *Zeige*, dass für alle $x_0 \in X$ die Abbildung

$$x \mapsto f(x) - x_0$$

mit einer zu bestimmenden Lipschitz-Konstante Lipschitz-stetig ist. *(5 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Abbildung

$$g : X \to X, \quad x \mapsto f(x) - x$$

bijektiv ist. *Überprüfe* dabei, ob die Voraussetzungen aller verwendeten Sätze erfüllt sind. *(12 Punkte)*

5. Mehrdimensionale Integration.

Gegeben sei die *Spirale des Archimedes*, welche durch die Kurve der Abbildung

$$f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto (x(\varphi), y(\varphi)) = (\varphi \cos(\varphi), \varphi \sin(\varphi))$$

beschrieben wird.
Sei O die offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, welche von der Kurve von $f|_{[0,\pi]}$ und $f|_{[2\pi,3\pi]}$ sowie $y = 0$ begrenzt wird und die in der Abbildung grau dargestellt wird.
Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi), \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

bildet die Menge

$$U := \{(\varphi, r) \,|\, \varphi \in (0, \pi),\ \varphi < r < \varphi + 2\pi\}$$

bijektiv auf O ab.

(a) *Skizziere* die Menge U und *bestimme* auf welche Teile des Randes von O die Kanten von U durch Φ abgebildet werden. *(10 Punkte)*

(b) *Bestimme* den Flächeninhalt von O. Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Sätze, die angewandt werden, erfüllt sin

(14 Punkte)