Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
Abschlußklausur, 2. Termin

2. September 2011

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 6 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 100.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–13 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1	12		4	12		
2 (a)	15		5	18		
(b)	21		6	12		
3	10					

1. Stetigkeit in zwei Dimensionen.

Beweise oder widerlege, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ stetig ist. *(12 Punkte)*

2. Extremwerte.

(a) *Bestimme* die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x^2\,(y-1) - y^2\ .$$

und *untersuche* jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum, oder keins von beidem handelt. *(15 Punkte)*

(b) *Untersuche,* ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^4 + y^4$$

auf der Menge

$$M := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 2x^2 + 8y^2 \leq 8 \,\}$$

ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt, und *bestimme* gegebenenfalls ihre Funktionswerte. *(21 Punkte)*

3. Singularitäten von Niveaumengen.

Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2\ .$$

Bestimme diejenigen $c \in \mathbb{R}$, für die die Niveaumenge $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) = c\,\}$ eine glatte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme die Lage aller Singularitäten der anderen Niveaumengen von g. *(10 Punkte)*

4. Banachscher Fixpunktsatz.

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) := \frac{(x-1)\cdot\exp(x)}{2\exp(1)}$$

auf dem Intervall $X := [-1, 1]$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und deshalb genau einen Fixpunkt auf X besitzt. *(12 Punkte)*

5. Jacobische Transformationsformel.

Wir betrachten die Parametertransformation

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (t,s) \mapsto (x,y) \text{ mit } x = \tfrac{1}{3}\,(t+s) \text{ und } y = \tfrac{1}{3}\,(2t-s)$$

sowie das Integrationsgebiet

$$O := \{\, \Phi(t,s) \,|\, 0 < t < 1 \text{ und } 0 < s < 1 \,\} \ .$$

Berechne durch Anwendung der Jacobischen Transformationsformel für die Transformation Φ das Integral

$$\int_O (x+y)^{2011} \cdot \exp(2x-y)\,\mathrm{d}\mu \ .$$

Dabei soll auch *überprüft* werden, dass alle Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel erfüllt sind. *(18 Punkte)*

6. Lesbegue-Theorie.

Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Zeige*:

$$\lim_{r \to 0+} \int_{[0,r]} f \, \mathrm{d}\mu = 0 \,. \qquad (\textit{12 Punkte})$$

[Tipp. Es genügt zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_n > 0$ gilt: $\lim_{n \to \infty} \int_{[0,r_n]} f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Hierfür wende man Lesbegue's Satz der beschränkten Konvergenz an.]