Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
Abschlußklausur

18. Juni 2011

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 6 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 100.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–13 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1 (a)	10		4 (a)	7		
(b)	5		(b)	7		
2 (a)	12		5	18		
(b)	14		6 (a)	8		**Note:**
3 (a)	5		(b)	7		
(b)	7					

1. Differenzierbarkeit in mehreren Veränderlichen.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\,y^2 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) *Berechne* die Richtungsableitung von f an der Stelle $(0,0)$ in Richtung des Vektors $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq (0,0)$. *(10 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege*: f ist an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar. *(5 Punkte)*

2. Extremwertsuche.

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}\,x^3 + 2xy + y^2\ .$$

Bestimme die kritischen Punkte von f, und *untersuche* jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, oder keins von beidem handelt. *(12 Punkte)*

(b) *Begründe*, dass die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 \cdot y$$

auf der Kreislinie $S := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\,\}$ Maximum und Minimum annimmt, und *bestimme* den maximalen sowie den minimalen Wert von $h|S$. *(14 Punkte)*

3. Auflösen von Gleichungen.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot \exp(y) - y \cdot \exp(x) + x\ .$$

(a) *Zeige*, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Nähe des Punkts $(0, 0)$ lokal in der Form $y = g(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion g auflösbar ist. *(5 Punkte)*

(b) *Berechne* $g'(0)$. *(7 Punkte)*

4. Lebesgue-Integrierbarkeit.

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := f \cdot \chi_{[0,n]}$; hierbei bezeichnet $\chi_{[0,n]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, n]$.

(a) *Begründe kurz*, dass f_n Lebesgue-integrierbar ist, und *berechne* $\int f_n \, \mathrm{d}\mu$. *(7 Punkte)*

(b) *Zeige* mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi, dass f Lebesgue-integrierbar ist, und *berechne* $\int f \, \mathrm{d}\mu$. *(7 Punkte)*

5. Jacobische Transformationsformel.

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Integrationsgebiete

$$O := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y > 0 \text{ und } 4 < x^2 + 4y^2 < 16 \,\}\ ,$$
$$U := \{\, (r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, 1 < r < 2 \text{ und } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \,\}$$

sowie die Transformationsabbildung

$$\Phi : U \to O,\ (r,\varphi) \mapsto (x,y) \text{ mit } x = 2r\,\cos(\varphi) \text{ und } y = r\,\sin(\varphi)\ .$$

Berechne durch Anwendung der Jacobischen Transformationsformel für die Transformation Φ das Lebesgue-Integral

$$\int_O \frac{y}{\sqrt{x^2+4y^2}}\,\mathrm{d}\mu\ .$$

Hinweis. Bei der Lösung soll *ohne Beweis* verwendet werden, dass die Abbildung Φ den Quader U bijektiv auf O abbildet. *(18 Punkte)*

6. Metrische Räume.

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $x,y,u,v \in X$. *Zeige*, dass gilt:

$$|d(x,y) - d(u,v)| \;\le\; d(x,u) + d(v,y) \;.$$

[Ein Verweis auf Beispiel 9.33(iii) gilt nicht als Beweis. — Tipp. Man unterscheide die beiden Fälle $d(x,y) \ge d(u,v)$ und $d(x,y) < d(u,v)$. Im ersten Fall fange man mit $d(x,y) \le \ldots$ an, indem man zweimal die Dreiecksungleichung anwendet.] *(8 Punkte)*

(b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchyfolgen in X . *Zeige* mit Hilfe von (a), dass dann $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. *(7 Punkte)*